Geometría del espacio

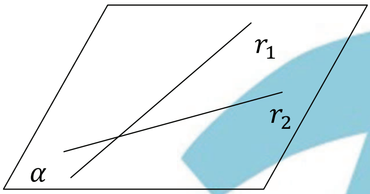
ING. RAÚL MARTÍNEZ

DEFINICIONES 8

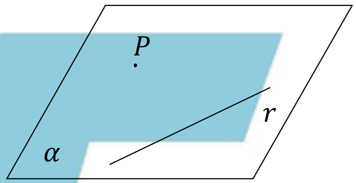
1- <u>Determinación de un plano:</u> Un plano en el espacio tridimensional queda perfectamente determinado o definido por:
   a) Dos rectas que se cortan.
   b) Una recta y un punto exterior a ella.
   c) Tres puntos no colineales.
   d) Dos rectas paralelas.

Estar definido un plano quiere decir que no existe ambigüedad a respecto de que plano nos estamos refiriendo.

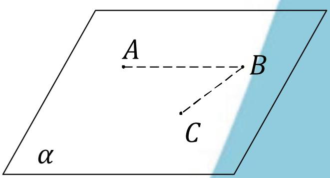
a)



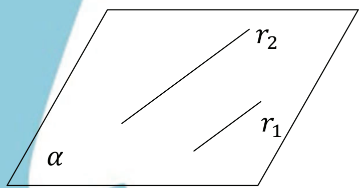
b)



c)

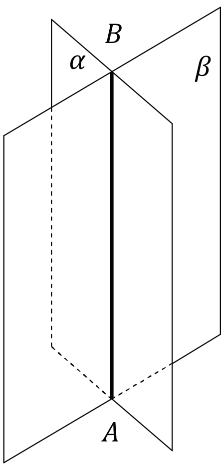


d)



OBS: Al tener 3 puntos es la misma cosa que tener 2 rectas que se cortan.

2- <u>Recta intersección de dos planos:</u>



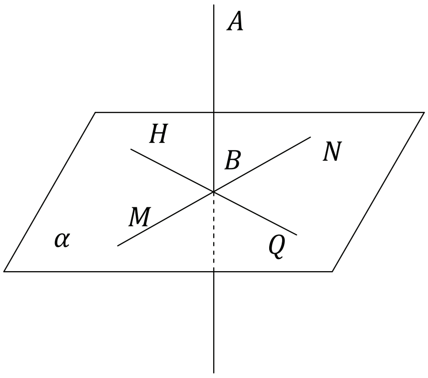
La intersección de dos planos es una recta.

Siempre que dos planos se cortan determinan una recta intersección de dichos planos.

Ejemplo: El plano $\overset{\square}{\alpha}$ se corta con el plano $\overset{\square}{\beta}$ según la recta AB.

En este caso decimos que la recta AB es la intersección de $\overset{\square}{\alpha}$ y $\overset{\square}{\beta}$.

3- Recta $\perp$ a un plano: una reta es $\perp$ a un plano si lo es a todas las rectas de dicho plano que pasan por su pie.



Si…. $\begin{cases} AB \perp MN \\ AB \perp HQ \end{cases}$

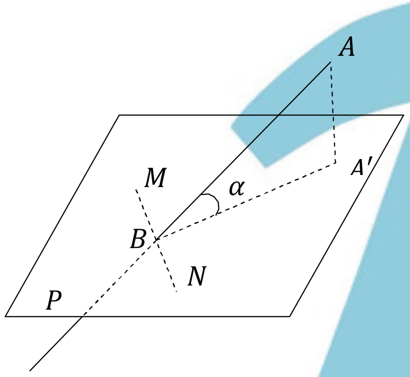
Siendo MN y HQ rectas del plano α.

$\therefore \quad AB \perp \overset{\square}{\alpha}.$

Mínimo debe ser $\perp$ a dos de ellos para que $AB \perp \overset{\square}{\alpha}$

Pero al ser $\perp$ a dos de ellas que pasan por su pie, lo será a cualquiera.

4- Recta oblicua a un plano: es la recta que tiene un punto en común con el plano pero no es $\perp$ al mismo.



También se puede decir que la recta es oblicua a un plano cuando forma con su proyección en dicho plano un ángulo agudo.

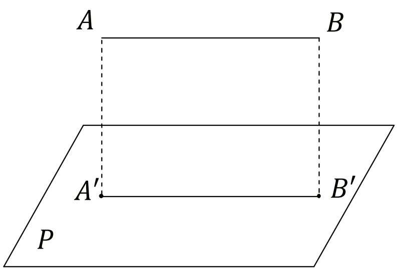
$\alpha =$ ángulo agudo

$\therefore \quad AB \angle \overset{\square}{P}$

OBS: Una oblicua puede ser $\perp$ a una sola recta del plano P sin ser $\perp$ al plano.

Ejemplo: $AB \perp MN \quad \not\Rightarrow \quad AB \perp \overset{\square}{P}$

5- Recta paralela a un plano: una recta es paralela a un plano cuando no tiene ningún punto en común con dicho plano. $AB \parallel \overset{\square}{P}$

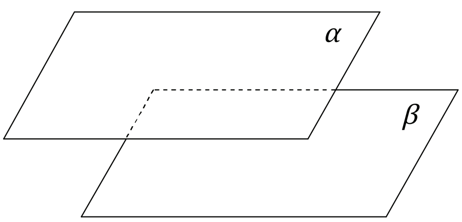


También se dice que una recta es paralela a un plano cuando lo es a su proyección en dicho plano.

$A'B'$ es la proyección de AB en $\overset{\square}{P}$

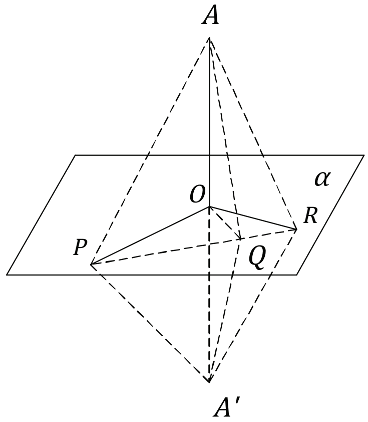
Si $AB \parallel A'B' \Longrightarrow AB \parallel \overset{\square}{P}$

6- Planos Paralelos entre sí: dos planos son paralelos entre si cuando no tienen ningún punto en común por más que se las prolongue en cualquier sentido.



$\overset{\square}{\alpha} \parallel \overset{\square}{\beta}$

<u>TEOREMA 1:</u> **Si una recta es perpendicular a otras dos en su punto de intersección, lo es al plano que determinan.**



H) $\left.\begin{array}{l} AO \perp OP \ldots \\ AO \perp OR \ldots \end{array}\right\}$ En el punto O.

OP y OR determinan el plano α

T) $AO \perp \overset{\square}{\alpha}$

D) En el plano α unimos los puntos P y R.

Trazamos $\overline{OA'} = \overline{OA}$ en la prolongación de $\overline{AO}$. Unimos los puntos A y A' con P y R respectivamente. Entonces tendremos:

$$\begin{array}{l} \overline{AP} = \overline{A'P} \\ \overline{AR} = \overline{A'R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \overline{OP} \perp \overline{AA'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Por hipotesis.} \\ \overline{OR} \perp \overline{AA'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Por hipotesis.} \\ \text{Luego tenemos dos oblicuas equidistantes del pie de la } \perp \\ OA = OA' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Por construcción.} \end{array} \right.$$

También tendremos:

$$\overset{\triangle}{APR} = \overset{\triangle}{A'PR} \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overline{AP} = \overline{A'P} \ldots\ldots\ldots \\ \overline{AR} = \overline{A'R} \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{Demostración anterior} \\ \overline{PR} = \overline{PR} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Lado común} \end{array} \right.$$

Luego: $\overset{\angle}{APR} = \overset{\angle}{A'PR}$ ....Por ser ángulos homólogos de $\overset{\triangle}{APR} = \overset{\triangle}{A'PR}$

Luego en el plano α trazamos por O una recta cualquiera $\overline{OQ}$ que intersecte PR en Q.

Uniendo el punto Q a los puntos A y A'.

Considerando los triángulos:

$$\overset{\triangle}{APQ} = \overset{\triangle}{A'PQ} \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \overline{AP} = \overline{A'P} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Demostración anterior.} \\ \overline{PQ} = \overline{PQ} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Lado común.} \\ \overset{\angle}{APQ} = \overset{\angle}{A'PQ} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Demostración anterior} \\ \text{Dos lados y el angulo comprendido iguales.} \end{array} \right.$$

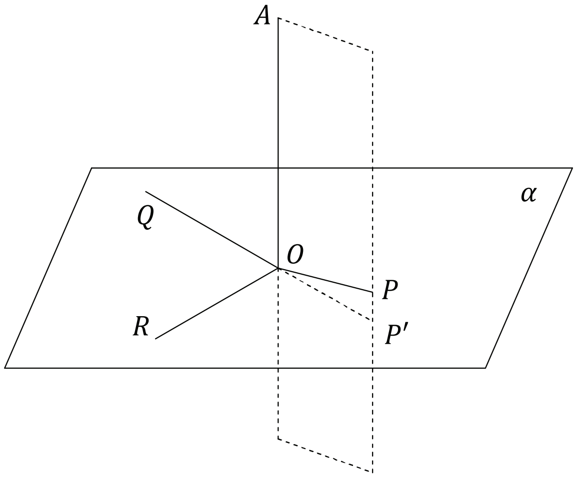
Entonces $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$......................Lados homólogos de triángulos iguales

Por tanto $\overline{OQ} \perp \overline{AA'}$ en O, porque dos puntos equidistantes de los extremos de un segmento de recta determinan la mediatriz de dicho segmento.

$\therefore$ $AO \perp$ a una recta cualquiera del plano que pasa por O.

Luego $AO \perp \overset{\square}{\alpha}$............................ Porque una recta es $\perp$ a un plano si lo es a todas las rectas que pasan por su pie en dicho plano.

TEOREMA 2: **Todas las rectas $\perp$ a una recta en un mismo punto, están en un plano perpendicular a ella en ese punto.**



H) $\left.\begin{array}{l}\overline{RO} \perp \overline{OA} \ldots \\ \overline{QO} \perp \overline{OA} \ldots\end{array}\right\}$ En el mismo punto O.

$\overline{OR}$ y $\overline{OQ}$ determinan el plano α.

$\overline{AO} \perp \alpha$.

T) Cualquier recta $\perp$ $\overline{OA}$ en el punto O, está en el plano α.

D) Trazamos una $\perp$ a la recta OA en el punto O.

Sea OP esa perpendicular.

Precisamos demostrar que OP está en el plano α

Supongamos que OP no está contenido en el plano α

Entonces trazamos el plano determinado por las rectas $\overline{OA}$ y $\overline{OP}$, y sea la intersección de este plano con el plano α la recta OP'

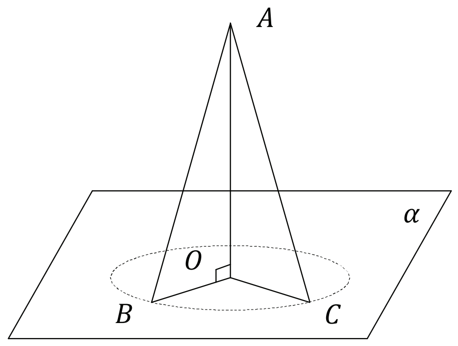
Entonces tendremos que $AO \perp OP'$ porque si una recta es $\perp$ a un plano lo es a cualquier recta del plano que pase por su pie.

En el plano determinado por $\overline{AO}$ y $\overline{OP}$ puede ser trazado solo una $\perp$ a una recta en un punto de dicha recta.

Luego $\overline{OP}$ y $\overline{OP'}$ coinciden y OP está en el plano α.

$\therefore$ Toda $\perp$ a $\overline{OA}$ en O está en el plano α.

TEOREMA 3: **Dos segmentos oblicuos comprendidos entre un punto y un plano y cuyos pies equidistan del de la perpendicular trazada por el punto al plano, son iguales.**



H) $\overline{AB} \angle \overset{\square}{\alpha}$

$\overline{AC} \angle \overset{\square}{\alpha}$

$\overline{AO} \perp \overset{\square}{\alpha}$

$\overline{OB} = \overline{OC}$

T) $\overline{AB} = \overline{AC}$

D) Considerando los triángulos rectángulos en O.

$\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{AOC}$ .... $\begin{cases} \overline{AO} = \overline{AO} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Lado común} \\ \overline{OB} = \overline{OC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Por hipotesis} \\ \therefore \quad \text{Por igualdad de triangulos rectangulos} \\ \quad\ \text{Dos catetos iguales.} \end{cases}$

Luego $\overline{AB} = \overline{AC}$

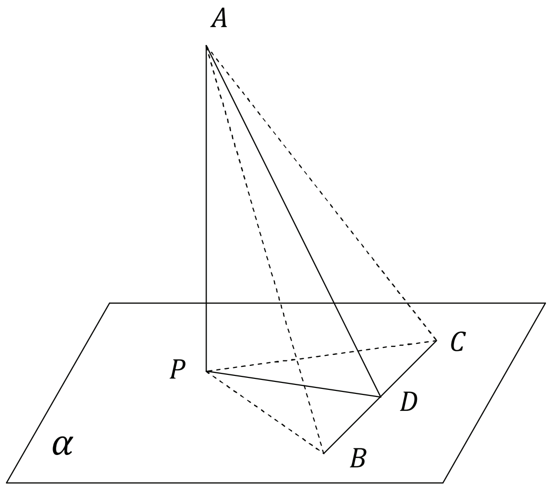
TEOREMA 4: **Si por el pie de una recta $\perp$ a un plano se traza la perpendicular a una recta dada en el plano, la recta determinada por el punto de intersección de estas y un punto cualquiera de la perpendicular al plano es $\perp$ a la recta dada en el plano (Teorema de las 3 perpendiculares)**

H) $\overline{AP} \perp \overset{\square}{\alpha}$ en P

$\overline{BC}$ está en $\overset{\square}{\alpha}$

$\overline{PD} \perp \overline{BC}$

Siendo el punto D la intersección.



T) $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

D) Tomando en la recta $\overline{BC}$ los puntos B y C de tal forma que $\overline{DB} = \overline{DC}$

Uniendo estos puntos con el punto P.

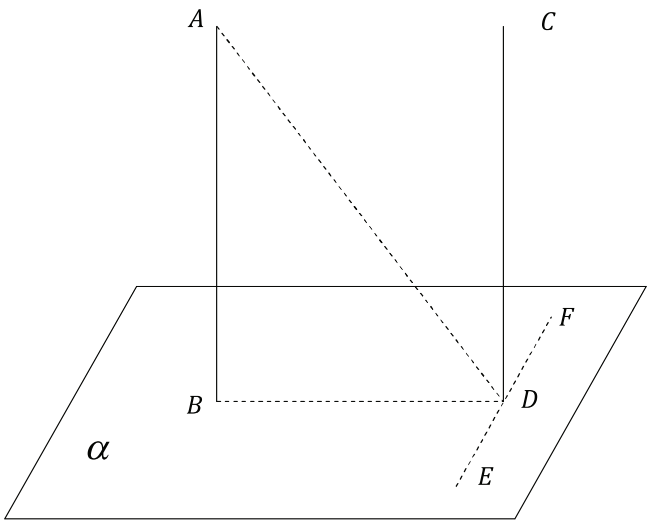
Tendremos que $\overline{PC} = \overline{PB}$ por ser segmentos oblicuos cuyos pies equidistan del pie de la $\perp$ PD.

También tendremos $\overline{AB} = \overline{AC}$ por ser oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la $\perp$ $\overline{AP}$

Entonces los puntos A y D equidistan de los extremos del segmento BC y determinan la mediatriz del segmento

$\therefore$ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

TEOREMA 5: Dos rectas perpendiculares a un mismo plano, son paralelas.



H) $\overline{AB} \perp \overset{\square}{\alpha}$

$\quad CD \perp \overset{\square}{\alpha}$

T) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

D) Trazamos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$

Por el punto D trazamos además una recta del plano α, tal que $\overline{EF} \perp \overline{BD}$

Tendremos: $\overline{CD} \perp \overline{EF}$ … … … … … … … Porque si una recta es $\perp$ a un plano lo es a toda recta del plano que pasa por su pie.

También: $\overline{AD} \perp \overline{EF}$..............................Por el teorema de las 3 perpendiculares.

$\overline{BD} \perp \overline{EF}$..............................Por construcción.

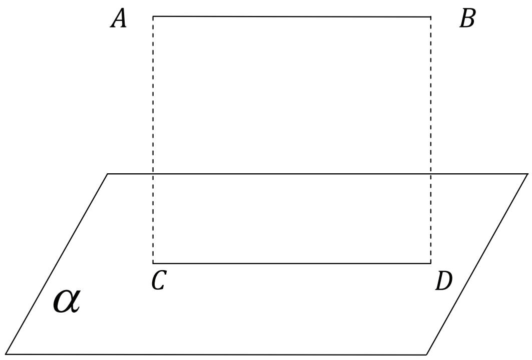
Las rectas $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ están en un mismo plano porque todas las rectas $\perp$ a una recta en un mismo punto están en un plano $\perp$ a dicha recta en ese punto.

La recta $\overline{AB}$ está contenida en ese mismo plano por tener dos puntos A y B contenidos en dicho plano.

Además tendremos que: $\left\{\begin{matrix} AB \perp BD \\ CD \perp BD \end{matrix}\right\}$ Si una recta es $\perp$ a un plano lo es a toda recta del plano que pasa por su pie.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ Pues dos rectas coplanares y $\perp$s a una 3º son paralelas entre sí.

TEOREMA 6: **Si dos rectas son paralelas, todo plano que contiene a una sola de ellas, es paralelo a la otra.**



H) $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$

Plano α contiene a $\overline{CD}$ pero no contiene a $\overline{AB}$

T) $\overline{AB} \mathbin{/\!/}$ Plano α

D) $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ por ser paralelas determinan un plano P.

Este plano P corta al plano α según la recta $\overline{CD}$, pues si $\overline{CD}$ pertenece a α y también pertenece a P, la intersección de estos planos solo puede ser una misma recta.

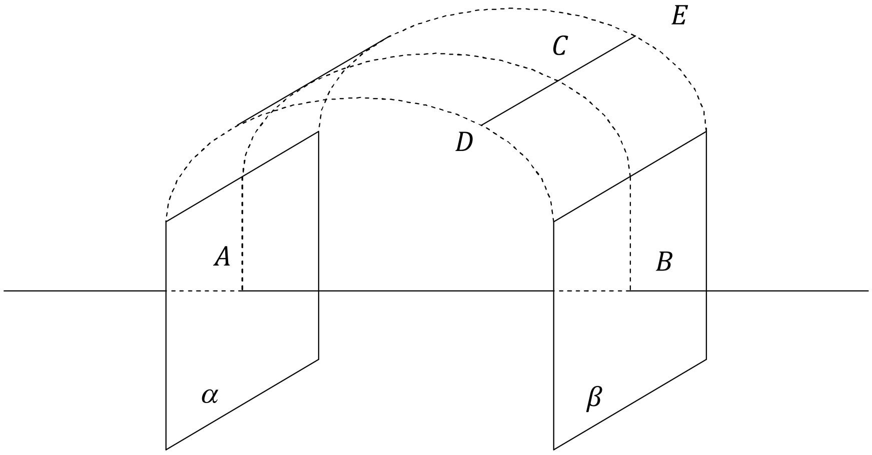
Luego si la recta $\overline{AB}$ corta al plano α en algún punto lo debe hacer en algún punto de la intersección de ambos planos que es la recta CD.

Pero $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$ por hipótesis.

Entonces $\overline{AB}$ no se encuentra o no intercepta al plano α.

Luego………….$\overline{AB} \mathbin{/\!/}$ Plano α

TEOREMA 7: **Dos planos perpendiculares a una misma recta, son paralelos entre sí.**



H) Plano $\alpha \perp \overline{AB}$ en A.

Plano $\beta \perp \overline{AB}$ en B.

T) Plano $\alpha \parallel$ Plano β.

D) Si los planos α y β no fueren paralelos, tendrían que intersectarse según una recta

Supongamos que se intersectan y que dicha intersección es la recta $\overline{DE}$

Elegimos un punto cualquiera de esta intersección DE y sea C dicho punto.

En el plano α trazamos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$

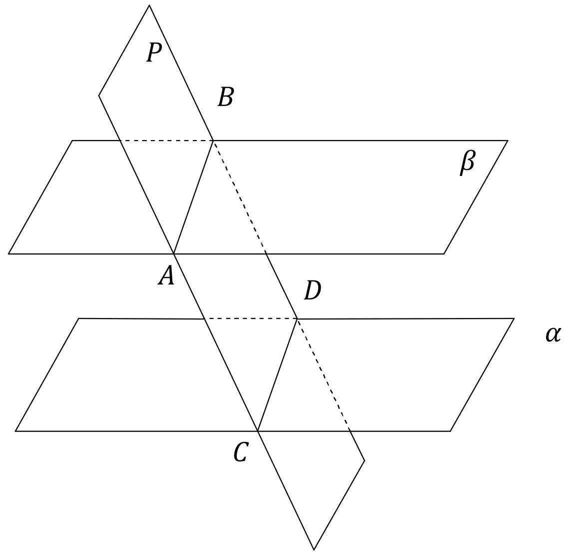
Entonces tendremos...................................... $\left\{ \begin{matrix} CA \perp AB \\ CB \perp AB \end{matrix} \right\}$ Porque si una recta es $\perp$ a un plano, lo es a toda recta que pase por su pie.

Entonces tendremos que desde el punto C, tenemos 2 $\perp$s a una misma recta lo cual es imposible.

Luego α y β no se intersectan.

$\therefore$ $\overset{\square}{\alpha} \parallel \overset{\square}{\beta}$

TEOREMA 8: **Las intersecciones de un plano con otros dos paralelos, son rectas paralelas.**



H) Plano α // Plano β

Plano P corta a los planos α y β y sus intersecciones son respectivamente $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$

T) $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$

D) $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son coplanares pues ambos pertenecen al plano P.

Si no fueren $/\!\!/_s$ se intersectarían en algún punto E.

Este punto E sería un punto de AB y por tanto estaría en el plano β.

También el punto E seria punto de $\overline{CD}$ y por lo tanto estaría en el plano α .

Entonces sería común a ambos planos, pero esto es imposible pues:

Plano α // Plano β.. Por hipótesis.

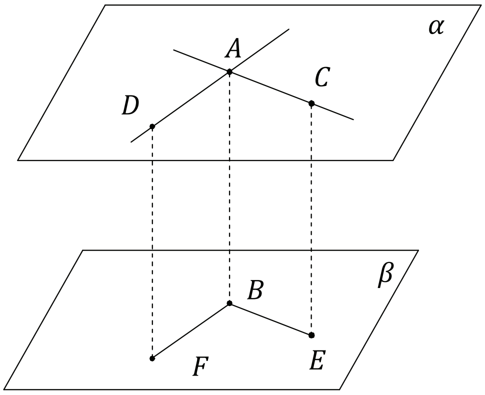
Luego: $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$

TEOREMA 9: **Si dos rectas que se cortan son paralelas a un plano, el plano que determinan también lo es.**

H) $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ rectas que se cortan en A y determinan el plano α.

AC // Plano β

AD // Plano β



T) Plano α // Plano β

D) Trazando la recta $\overline{AB} \perp \beta$ quedan determinados los siguientes planos.

- Plano formado por $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ cuya intersección con el plano β es la recta $\overline{BE}$.
- Plano determinado por $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ cuya intersección con el plano β es BF.

En estas condiciones tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \perp \overline{BE} \\ \overline{AB} \perp \overline{BF} \end{array}\right. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \text{Porque si una recta es} \perp \text{a un plano} \\ \text{lo es a toda recta del plano que pasa} \\ \text{por su pie.} \end{array}\right.$$

Por otra parte tenemos que $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ están en un mismo plano por construcción, y la recta $\overline{AC}$ no puede cortar a la recta BE, sin encontrar o cortar al plano β en que está BE, porque AC // Plano β por hipótesis.

Entonces no puede existir ese punto de intersección y podemos escribir $\overline{BE}$ // $\overline{AC}$

Análogamente siguiendo el mismo raciocinio podemos afirmar también $\overline{BF}$ // $\overline{AD}$.

En estas condiciones podemos afirmar

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \perp \overline{AC} \\ \overline{AB} \perp \overline{AD} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \text{Porque si dos o más rectas son paralelas} \\ \text{toda} \perp \text{a una de ellas es} \perp \text{a la otra.} \end{array}\right.$$

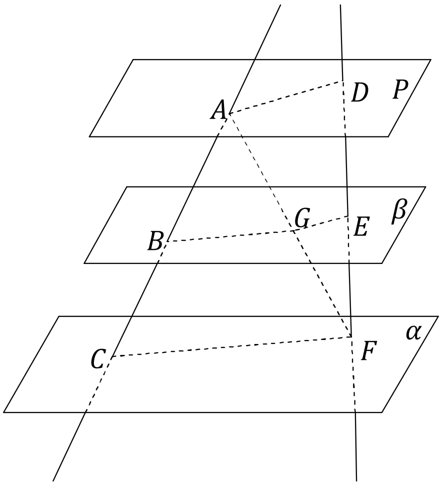
Luego podemos afirmar que

$AB \perp$ Plano α ....Porque si 1 recta es $\perp$ a otras dos en su punto de intersección, lo es al plano que determinan.

Entonces ahora tenemos:
$$\left\{\begin{array}{l} AB \perp \alpha \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Demostrado} \\ AB \perp \beta \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Por construcción} \end{array}\right.$$

Luego....................... Plano α // Plano β......................Porque dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí.

TEOREMA 10: **Los segmentos determinados en dos rectas cruzadas por tres o más planos paralelos, son proporcionales.**



H) $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$................ rectas cualesquiera.

Plano α // Plano β // Plano P

Plano α , β y P cortan a las dos rectas AC y DF.

T) $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{EF}}}$

D) El caso más general en el espacio es que las dos rectas no sean coplanares (cuando son coplanares ya fue demostrado en geometría plana).

Considerando que las rectas no están en un mismo plano, unimos el punto A con el punto F

En estas condiciones quedan determinados los planos.

Plano $\overset{\square}{ACF}$ cuya intersección con $\overset{\square}{\alpha}$ y $\overset{\square}{\beta}$ son respectivamente $\overline{CF}$ y $\overline{BG}$ .que serán paralelas por el Teorema "Si un plano corta a otros planos paralelos entre sí, las intersecciones también serán paralelas"

Plano $\overset{\square}{AFD}$........................cuya intersección con los planos P y β son $\overline{AD}$ y $\overline{GE}$ respectivamente.

En el $\overset{\triangle}{ACF}$ tenemos $\overline{BG}$ // $\overline{CF}$ por el teorema de geometría plana. (Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos en partes proporcionales)

Luego: $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GF}}$...(1)

En el triángulo $\overset{\triangle}{FAD}$ tenemos $\overline{GE}$ // $\overline{AD}$ y por el mismo principio podemos escribir.

$\dfrac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GF}}=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}$... (2)

Las igualdades (1) y (2) tienen una razón común, luego las otras dos son iguales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

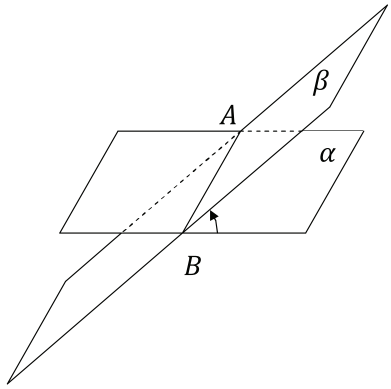
DEFINICIONES 9

1- <u>Ángulo Diedro:</u> Cuando dos semiplanos tienen el mismo borde, dividen al espacio es dos regiones. Cada una de ellas se llama ángulo diedro.

<u>Notación:</u>

- ❖ d/AB
- ❖ $\alpha - AB - \beta$
- ❖ $\overset{\wedge}{\mathrm{d}}$

El diedro es el espacio delimitado por dos semiplanos que tienen una intersección como límite de ambos.



2- <u>Caras del diedro:</u> Cada uno de los semiplanos que forman el diedro se llaman caras del diedro.
Ej.: α y β.

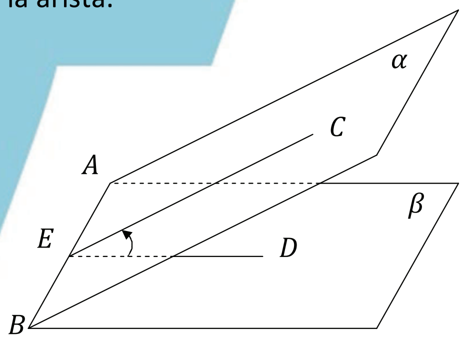
3- <u>Aristas de un diedro:</u> Es el límite o borde común de ambos semiplanos. ARISTA ....$\overline{AB}$

4- <u>Rectilíneo de un diedro:</u> Es el ángulo formado por dos rectas trazadas por un mismo punto de la arista del diedro, una en cada cara del diedro y ambas $\perp$ a la arista.

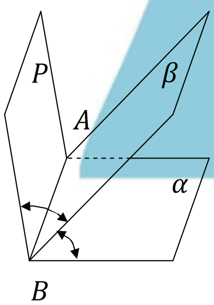
$$\left.\begin{matrix} CE \perp AB \\ DE \perp AB \end{matrix}\right\} \text{En el mismo punto } E$$

Luego $\measuredangle CED$ es el rectilíneo del $\beta - AB - \alpha$

El rectilíneo de un diedro es la medida del diedro.



5- <u>Diedros consecutivos:</u> son los diedros que tienen una arista en común y una cara en común.



$\alpha - AB - \beta$
y
$\beta - AB - \mathrm{P}$

Son diedros consecutivos

AB............................ Arista común.

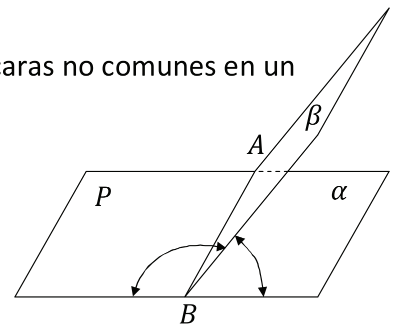
β............................... Cara común.

6- <u>Diedros adyacentes:</u> Tienen una arista y una cara en común y las caras no comunes en un mismo plano o son coplanares.

Diedros: ....$\alpha - AB - \beta$

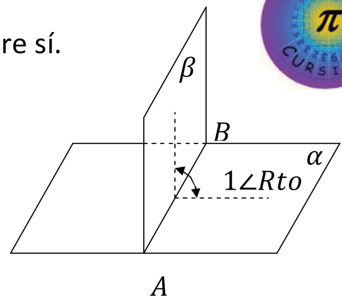
Y

$\beta - AB - \mathrm{P}$



Son adyacentes pues además de ser consecutivos los semiplanos α y P están en un mismo plano o son coplanares.

7- <u>Diedro Recto:</u> Cuando dos diedros son adyacentes e iguales entre sí.

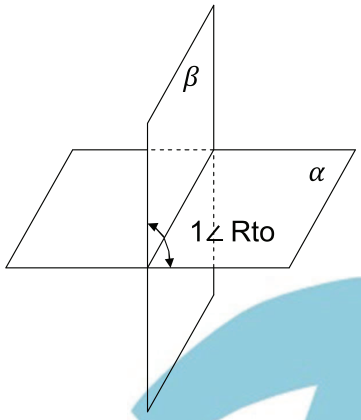


A cada uno de ellos denominamos diedros rectos

El rectilíneo de un diedro recto $= 1 \angle$ Recto.

$\alpha - AB - \beta$ es un diedro recto $= 1 \angle$ Rto.

8- <u>Planos perpendiculares:</u> Dos planos son perpendiculares entre sí, cuando al cortase forman diedros adyacentes iguales o diedros rectos.



$$\overset{\square}{\alpha} \perp \overset{\square}{\beta}$$

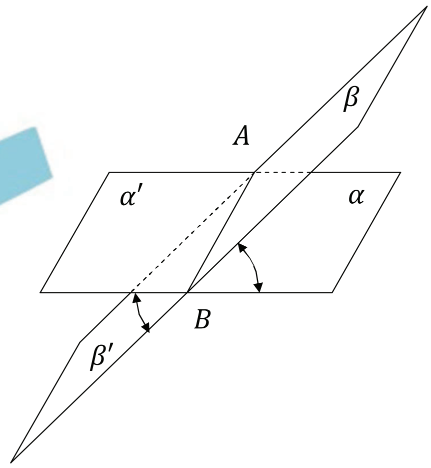
9- <u>Diedros opuestos por la arista:</u>

Son aquellos que tienen la arista común y sus caras son semiplanos opuestos.

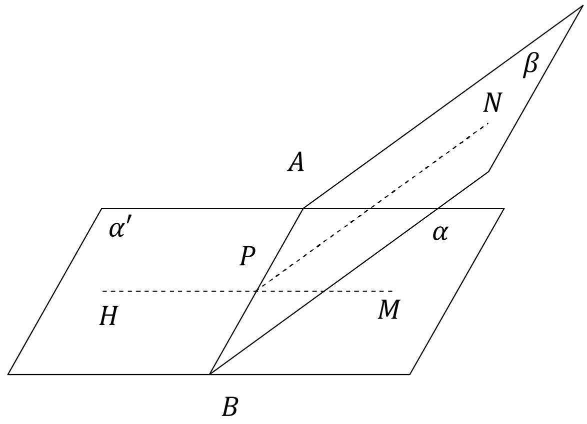
Los diedros opuestos por la arista son iguales y sus respectivos rectilíneos son iguales.

Los diedros: $\alpha - AB - \beta$
y
$\alpha' - AB - \beta'$

Son opuestos por la arista AB.



TEOREMA 1: **Dos diedros adyacentes son suplementarios.**



H) $\alpha' - AB - \beta$ y $\beta - AB - \alpha$ …………Son adyacentes.

T) $\alpha' - AB - \beta \quad + \quad \beta - AB - \alpha \; = \; 2\angle\, Rtos \; = \; 180°$

D) Elegimos un punto cualquiera de la arista común por ejemplo el punto P.

Por este punto P trazamos los rectilíneos de ambos diedros, es decir en cada plano α, β y α' trazamos la $\perp$ a $\overline{AB}$ en el mismo punto P.

Los segmentos $\overline{HP}$ y $\overline{PM}$ están en línea recta por pertenecer a un mismo plano α y ser $\perp$ a AB en el mismo punto.

Consideremos el plano $\overset{\square}{HPN}$ determinado por HM y PN tendremos.

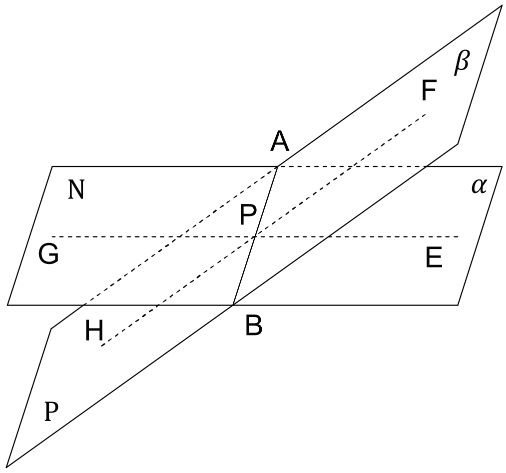
$$\overset{\angle}{HPN} + \overset{\angle}{NPM} = 2\angle Rtos \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots \left[\begin{array}{l} \text{Vertice P común} \\ \text{Lado } PN \text{ común} \\ \overline{HP} \; y \; \overline{PM} \text{ en linea recta.} \end{array}\right.$$

Luego si los rectilíneos son suplementarios los diedros también serán:

$$\alpha' - AB - \beta \quad + \quad \beta - AB - \alpha \; = \; 2\angle\, Rtos$$

TEOREMA 2: **Dos diedros opuestos por la arista son iguales.**

H) $\overline{AB}$ arista común de los.... $\begin{cases} \alpha - AB - \beta \\ N - AB - P \end{cases}$



$\overset{\square}{\alpha}$ y $\overset{\square}{N}$ están en un mismo plano.

$\overset{\square}{\beta}$ y $\overset{\square}{P}$ están en un mismo plano.

T) $\alpha - AB - \beta \quad = \quad N - AB - P$

D) $\alpha - AB - \beta \quad + \quad \beta - AB - \mathrm{N} \ = 2\angle Rtos$.......... (1) ...... Son diedros adyacentes porque $\overset{\square}{N}$ y $\overset{\square}{\alpha}$ están en un mismo plano. Además tienen una arista común y aplicamos el teorema: Dos diedros adyacentes son suplementarios.

Por otra parte también tenemos:

$P - AB - \ N \quad + \quad N - AB - \beta \ = \ 2\angle Rtos$............(2) ...... Por el mismo motivo anterior.

Luego:

$$\alpha - AB - \beta \quad + \quad \beta - AB - N \ = \ P - AB - N \quad + \quad N - AB - \beta$$

Transponiendo los términos y simplificando tendremos

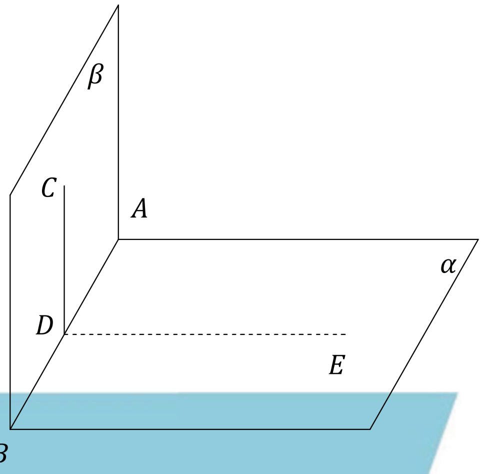
$$\therefore \qquad \alpha - \ AB - \beta \quad = \quad N - AB - P$$

TEOREMA 3: **Si dos planos son perpendiculares entre sí, toda recta perpendicular a la intersección y contenida en uno de ellos es $\perp$ al otro.**

H) $\overset{\square}{\beta} \perp \overset{\square}{\alpha}$

CD situado en $\overset{\square}{\beta}$

CD $\perp$ AB



T) $CD \perp \overset{\square}{\alpha}$

D) Trazando en $\overset{\square}{\alpha}$ la recta $\overline{DE}$ tal que $\overline{DE} \perp \overline{AB}$

En estas condiciones el ángulo $\overset{\angle}{CDE}$ será el rectilíneo del diedro $\alpha - AB - \beta$

Como este diedro es recto por hipótesis su rectilíneo también lo será.

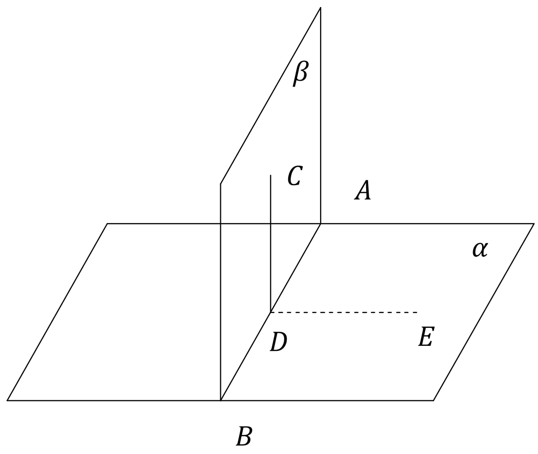
Luego $\overline{CD} \perp DE$

Pero $\overline{CD} \perp AB$ por hipótesis.

Aplicando el teorema: Si una recta es $\perp$ a dos rectas de un mismo plano que pasan por su pie, dicha recta es $\perp$ al plano.

Luego: $CD \perp \overset{\square}{\alpha}$

TEOREMA 4: **Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pasa por ella también lo es.**



H) $\overline{CD} \perp \overset{\square}{\alpha}$

$\overset{\square}{\beta}$ plano cualquiera que pasa por $\overline{CD}$

T) $\overset{\square}{\beta} \perp \overset{\square}{\alpha}$

D) Trazamos en el plano α la recta $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ que es la intersección de los dos planos.

Entonces podemos escribir.

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$…………………pues $\overline{CD} \perp \overset{\square}{\alpha}$……………………hipótesis.

$\overline{DE} \perp \overline{AB}$…………………por construcción.

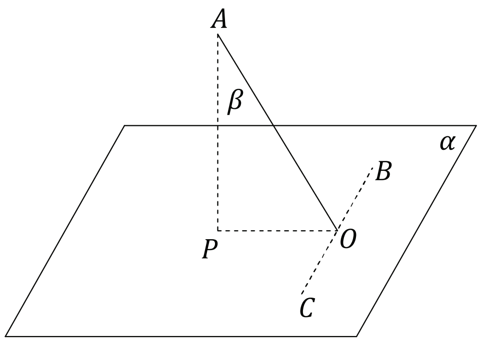
Luego el ángulo $\overset{\angle}{CDE}$ es el rectilíneo del diedro

$\overset{\angle}{CDE} = 1\angle\, Rto$……………………………Puesto que por hipótesis $\overline{CD} \perp \overset{\square}{\alpha}$ y también será $\perp$ a cualquier recta por su pie.

Si el rectilíneo del diedro vale $1\angle$ Rto debemos concluir que los dos planos son $\perp$s.

Luego:…………………………………… $\overset{\square}{\beta} \perp \overset{\square}{\alpha}$

TEOREMA 5: **Por una recta no perpendicular a un plano, pasa un plano y solo uno, perpendicular a este.**



H) $\overline{AO} \angle \overset{\square}{\alpha}$

T) Por $\overline{AO}$ pasa un plano $\overset{\square}{AOP} \perp \overset{\square}{\alpha}$

$\overset{\square}{\beta}$ es único.

D) Trazamos desde el punto A la recta $\overline{AP} \perp \overset{\square}{\alpha}$

Unamos el pie de esta $\perp$ con el pie de la oblicua $\overline{AO}$ quedando determinado el segmento $\overline{PO}$.

Por el punto O y en el plano α trazamos $\overline{BC} \perp \overline{PO}$

En estas condiciones tenemos

$\overline{AO} \perp \overline{BC}$ ……………………………….Teorema de las tres perpendiculares.

Pero también $\overline{PO} \perp \overline{BC}$ por construcción.

Luego podemos concluir que

$\overline{BC} \perp$ Plano $\overset{\square}{AOP}$……………………………Si una recta es perpendicular a otras dos que se cortan lo es al plano que determinan.

El plano α contiene a BC por construcción

Luego podemos concluir:

$\overset{\square}{\alpha} \perp$ Plano $\overset{\square}{AOP}$……………………………………….....Porque si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pasa por ella también lo es.

Ahora precisamos demostrar que el plano $\overset{\square}{AOP}$ es único.

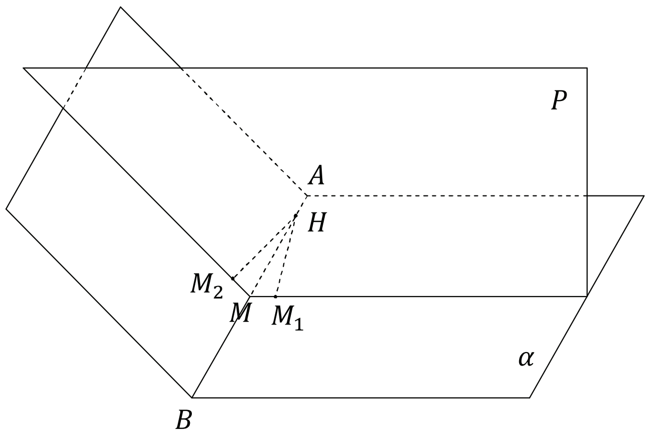
Puesto que la recta $\overline{AP}$ está contenida en el plano $\overset{\square}{AOP}$ por tener dos puntos en ese plano.

Si existiese otro plano $\perp$ $\overset{\square}{\alpha}$ dicho plano no contendría al segmento $\overline{AP}$ puesto que $\overline{AO}$ y $\overline{AP}$ determinan un plano, pero contendría al segmento AO.

Y en este supuesto plano podríamos trazar desde el punto A otra perpendicular al plano $\overset{\square}{\alpha}$
Pero esto es imposible porque desde un punto exterior a un plano se puede trazar solamente una $\perp$ a un plano.

Luego el plano $\overset{\square}{AOP}$ es el único plano $\perp$ al plano $\overset{\square}{\alpha}$.

<u>Teorema 6:</u> **Si un plano es perpendicular a otros dos que se cortan, lo es a la intersección de los mismos.**



H) $\overset{\square}{P} \perp \overset{\square}{\alpha}$

$\overset{\square}{P} \perp \overset{\square}{\beta}$

$\overset{\square}{\alpha}$ y $\overset{\square}{\beta}$ se cortan según $\overline{AB}$

T) $\overset{\square}{P} \perp \overline{AB}$.

D) Supongamos que AB no es $\perp$ al plano P.

Sea H un punto cualquiera de la intersección $\overline{AB}$

Trazamos desde este punto H una recta del plano α que sea $\perp$ $\overset{\square}{P}$ y sea HM_1 dicha $\perp$.

$HM_1 \perp \overset{\square}{P}$……………………………………Por construcción

Por este mismo punto H y ahora en el plano β trazamos una $\perp$ al plano P y sea HM_2 dicha $\perp$

$HM_2 \perp \overset{\square}{P}$…………………………………… Por construcción

El punto H es un punto exterior al plano P y por este punto solo puede trazarse una $\perp$ a $\overset{\square}{P}$

Luego podemos concluir que HM_1 y HM_2 coinciden.

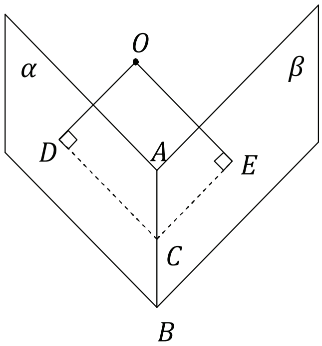
Además estos segmentos deben pertenecer al plano α y al plano β pues por construcción así lo hicimos.

Esto solo es posible si HM coincide con la intersección $\overline{AB}$.

Luego $\overline{AB} \perp \overset{\square}{P}$

O lo que es lo mismo: $\overset{\square}{P} \perp AB$

TEOREMA 7: **Si por un punto interior a un diedro se trazan las perpendiculares a las caras, el ángulo que forman las dos semirrectas que cortan a las caras es suplementario del diedro.**



H) O es un punto interior al diedro $\alpha - AB - \beta$

$\overset{\square}{OE} \perp \beta$

$\overset{\square}{OD} \perp \alpha$

T) $\overset{\measuredangle}{DOE} \quad + \quad \alpha - AB - \beta \quad = \quad 2\angle Rtos.$

D) Plano $\overset{\square}{DOE} \perp \overset{\square}{\alpha}$ ……………. $\Big\{$ Todo plano que contiene a una $\perp$ a otro plano
$\overset{\square}{DOE} \perp \overset{\square}{\beta}$ tambien será $\perp$ a dicho plano.

También $\overset{\square}{DOE} \perp \overline{AB}$……………………………….Si un plano es $\perp$ a otros dos que se cortan será a la intersección de estos.

También podemos escribir.

$\overline{AB} \perp \overset{\square}{DOE}$ en el punto C.

$\overline{DC} \perp \overline{AB}$ ………………………… $\Big\{$ Porque ambos son rectas del plano α y β
$\overline{EC} \perp \overline{AB}$ …………………………. respectivamente y pasan por el pie C de
la $\perp$ a ambos.

Luego el rectilíneo del diedro $\alpha - AB - \beta$ es el ángulo $\overset{\measuredangle}{DCE}$ y es coplanar con el ángulo $\overset{\measuredangle}{DOE}$

Por el teorema de geometría plana "Dos ángulos cuyos lados son respectivamente $\perp$s entre sí, uno agudo y otro obtuso son suplementarios"

Luego: $\overset{\measuredangle}{DCE} + \overset{\measuredangle}{DOE} \; = \; 2\angle Rtos$

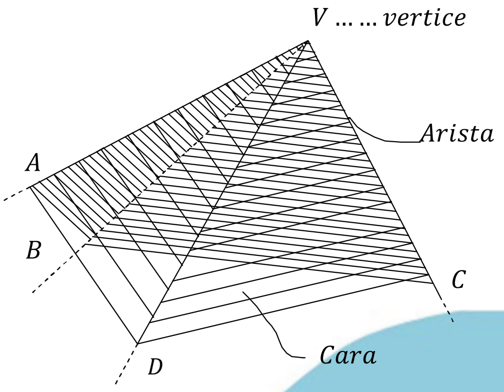
$$\overset{\measuredangle}{DOE} \quad + \quad \alpha - AB - \beta \; = \; 2\angle Rtos$$

DEFINICIONES 10

1-) ***Ángulo Poliedro:*** Se llama ángulo poliedro al espacio delimitado por tres o más planos que se cortan en un punto común al cual llamamos vértice.

Los ángulos formados por dos planos consecutivos o contiguos se llaman diedros del ángulo poliedro.

2-) ***Vértice de un ángulo poliedro:*** es pues el punto común de todos los planos que delimitan o componen el ángulo poliedro.



También podemos decir que es la intersección de todas las aristas de los diedros que forman el poliedro.

OBS: El ángulo poliedro es una pirámide que no tiene fondo o base, pues es ilimitada para abajo.

3-) ***Caras del Poliedro:*** son los ángulos determinados por dos aristas consecutivas. $D\hat{V}C$ es una cara del ángulo poliedro.

Observamos que cada cara es un ángulo del plano (CARA)

4-) ***Diedros de un ángulo poliedro***: son los ángulos formados por dos planos contiguos a una misma arista.

Estos ángulos son ángulos diedros.

OBS: Un ángulo poliedro necesariamente debe ser una superficie piramidal.

5-) ***Clasificación de los ángulos Poliedros:***

a) Un ángulo poliedro es convexo cuando el plano determinado por cualquiera y cada una de todas sus caras, deja al ángulo poliedro en un mismo semiespacio con respecto a ese plano.

b) También podemos decir que cualquier sección de un plano que corta todas sus aristas, menos el vértice forma una sección que es un polígono convexo.

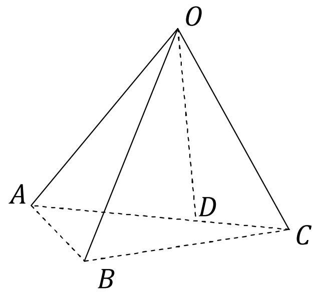
OBS: Un ángulo poliedro divide el espacio tridimensional en dos regiones, una interior y otra exterior al ángulo.

Otra clasificación de los ángulos poliedros es en función del número de caras.

- 3 Caras……………………………….. Ángulo Triedro
- 4 Caras……………………………….. Ángulo Tetraedro.
- 5 Caras……………………………….. Ángulo Pentaedro.
- 6 Caras……………………………….. Ángulo Exaedro…etc.

Cuando el número de caras es tres se puede suprimir la palabra ángulo y decir simplemente TRIEDRO. En los otros casos no se acostumbra proceder así.

TEOREMA 1: **En todo triedro, una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.**



H) $O - ABC$ es un triedro.

T) $\overset{\measuredangle}{AOC} < \overset{\measuredangle}{AOB} + \overset{\measuredangle}{BOC}$

$\overset{\measuredangle}{AOB} > \overset{\measuredangle}{AOC} - \overset{\measuredangle}{BOC}$

D) Suponiendo que el ángulo plano $\overset{\measuredangle}{AOC}$ es mayor que cualquiera de los otros dos, pues si fuese menor o igual a alguno de ellos, la primera parte del teorema quedaría demostrado.

Tracemos en el plano $\overset{\square}{AOC}$ una recta $\overline{OD}$ tal que $\overset{\measuredangle}{AOD} = \overset{\measuredangle}{AOB}$, pero también elegimos el punto D de tal forma que $\overline{OD} = \overline{OB}$

En estas condiciones unimos el punto A con el punto D, determinando el punto C.

Luego unimos el punto A con el punto B , también unimos el punto B con el punto C.

Entonces tendremos:

$$\overset{\triangle}{AOD} = \overset{\triangle}{AOB} \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \overline{OA} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Lado común} \\ \overline{OD} = \overline{OB} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Por construcción} \\ \overset{\measuredangle}{AOD} = \overset{\measuredangle}{AOB} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Por construcción.} \\ \text{Luego tienen dos lados iguales y el angulo comprendido.} \end{cases}$$

Entonces $\overline{AD} = \overline{AB}$

Ahora consideremos el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$

$\overline{AD} + \overline{DC} < \overline{AB} + \overline{BC}$...............En un triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos.

Pero $\overline{AD} = \overline{AB}$

Luego: $\overline{DC} < \overline{BC}$

Consideremos ahora los triángulos $\overset{\triangle}{DOC}$ y $\overset{\triangle}{BOC}$ .... $\begin{cases} \overline{OC} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Lado común} \\ \overline{OD} = \overline{OB} \ldots\ldots \text{Por construcción} \end{cases}$

Entonces a menor lado se opone menor ángulo y podemos escribir.

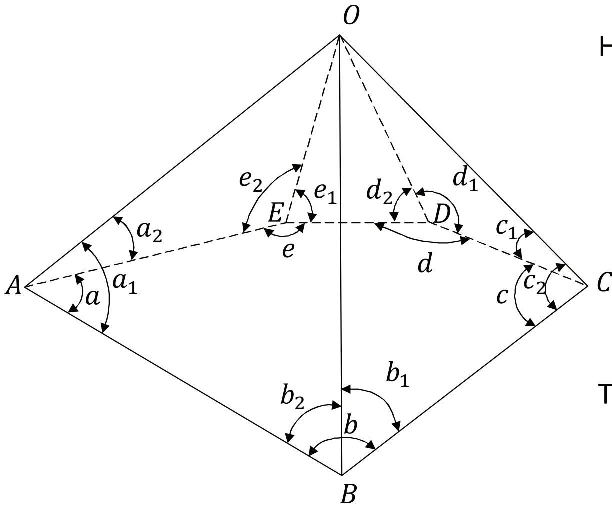
$$\begin{array}{l} \overset{\measuredangle}{DOC} < \overset{\measuredangle}{BOC} \\ \underline{\overset{\measuredangle}{AOD} = \overset{\measuredangle}{AOB}} \\ \overset{\measuredangle}{AOC} < \overset{\measuredangle}{AOB} + \overset{\measuredangle}{BOC} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Sumando esta igualdad} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots .\text{1ra Parte} \end{array}$$

Aplicando lo que acabamos de demostrar pero en otra secuencia tendremos también.

$$\overset{\measuredangle}{AOB} + \overset{\measuredangle}{BOC} > \overset{\measuredangle}{AOC}$$

$\overset{\measuredangle}{AOB} > \overset{\measuredangle}{AOC} - \overset{\measuredangle}{BOC}$..2da Parte.

TEOREMA 2: **La suma de las caras de un ángulo poliedro es mayor que cero y menor que cuatro ángulos rectos.**



H) $O - ABCDE$ es un ángulo poliedro de n caras.

$\overset{\measuredangle}{O}$ Es la suma de todos los ángulos planos que concurren en el vértice O.

$ABCDE$………… es un polígono determinado por un plano que corta las aristas sin pasar por O. Que también tendrá n lados.

T) cero < $\overset{\measuredangle}{O}$ < 4 Rtos.

D) El plano que corta las aristas formara un polígono de tantos lados como caras tiene el ángulo poliedro.

La suma de sus ángulos internos $S_{(i)} = a + b + c + d + e \quad = \quad 2Rtos.(n-2)$

Al mismo tiempo quedaran determinados el mismo número n de triángulos laterales cuya suma de ángulos internos será: $S_{(T)} = n.2Rtos$

Por otra parte también tendremos que en el vértice de cada polígono formado con el plano, quedara formado un triedro.

En cada uno de estos triedros "Una cara es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia". Luego tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\angle}{a} < \overset{\angle}{a_1} + \overset{\angle}{a_2} \\ \overset{\angle}{b} < \overset{\angle}{b_1} + \overset{\angle}{b_2} \\ \overset{\angle}{c} < \overset{\angle}{c_1} + \overset{\angle}{c_2} \\ \overset{\angle}{d} < \overset{\angle}{d_1} + \overset{\angle}{d_2} \\ \overset{\angle}{e} < \overset{\angle}{e_1} + \overset{\angle}{e_2} \end{array}\right\} \text{Sumando miembro a miembro}$$

$$\overset{\angle}{a} + \overset{\angle}{b} + \overset{\angle}{c} + \overset{\angle}{d} + \overset{\angle}{e} < \left(\overset{\angle}{a_1} + \overset{\angle}{a_2}\right) + \left(\overset{\angle}{b_1} + \overset{\angle}{b_2}\right) + \cdots + \left(\overset{\angle}{e_1} + \overset{\angle}{e_2}\right)$$

$$S_{(i)} < S_{(T)} - \overset{\measuredangle}{0}$$

$$2\angle\, Rtos\,.n - 4\angle\, Rtos < n\,.2\angle\, Rtos - \overset{\measuredangle}{0}$$

$$2\angle\, Rtos\,.(n-2) < n\,.2\angle\, Rtos - \overset{\measuredangle}{0}$$

$$-4\angle\, Rtos < -\overset{\measuredangle}{0} \text{ …………………}\times(-1)$$

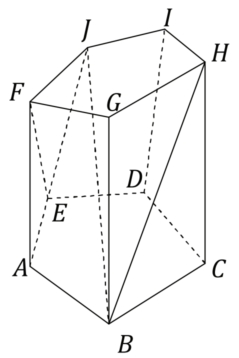
$$4\angle\, Rtos > \overset{\measuredangle}{0} \text{ ……………. Primera parte.}$$

Para que la sumatoria de todos los ángulos planos que concurren en el vértice O sea nulo, todas las aristas deben ser $/\!/$s, y no podrían formar los triángulos laterales que no se intersecarían.

Luego debemos admitir que $\overset{\measuredangle}{O} > 0$ (cero).

Entonces cero $< \overset{\measuredangle}{O} <$ 4 Rtos.

1-) **CUERPO POLIEDRO:** Es un sólido limitado por planos, estos planos determinan polígonos que son las caras del poliedro, las intersecciones de estas caras son las aristas del poliedro y las intersecciones de las aristas son los vértices.



Los segmentos de rectas de extremos en vértices situados en diferentes caras son diagonales del poliedro.

Vertices: $A\ ;\ B\ ;\ D\ ;\ G\ ;\ H\ ;\ F\ ;\ldots etc$

Aristas: $\overline{AB}\ ;\ \overline{BG}\ ;\ \overline{JI}\ ;\ \overline{FE}\ ;\ \overline{DI}\ ;\ \overline{ED}\ ;\ \overline{CH}\ \ldots etc$

Caras: $ABCDE\ ;\ GHB\ ;\ ABGF\ ;\ EDIJ\ ;\ CDHI\ ;\ldots etc$

Diagonal: $\overline{JB}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots etc$

2-) **SECCIÓN DE UN CUERPO POLIEDRO:** es la intersección de sus caras con un plano que las corta.

3-) **PRISMA:** Llámese prisma un cuerpo poliedro dos de cuyas caras son polígonos iguales situados en planos paralelos y cuyas otras caras son paralelogramos.

Los dos polígonos paralelos se llaman BASES DEL PRISMA.

Los paralelogramos se llaman CARAS LATERALES.

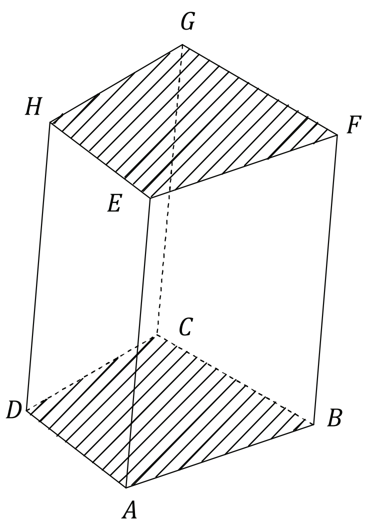
Las intersecciones de las caras laterales se llaman ARISTAS LATERALES.

Con respecto a los prismas, el término cara se aplica exclusivamente a las laterales.

La suma de las áreas de las caras se llama área lateral del prisma.

Las aristas laterales del prisma son iguales.

ALTURA DE UN PRISMA: Llamase altura de un prisma la longitud de la $\perp$ común a los planos de las bases y comprendida entre estos planos, es decir, la distancia entre los planos de las bases.



BASES PARALELAS:

$ABCD\ \ y\ \ EFGH$

CARAS LATERALES: O CARAS

$ABFE;\ \ DCGH;\ldots..$

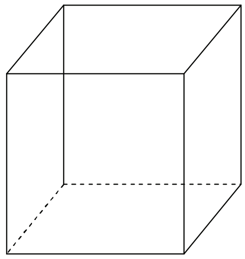
ARISTAS LATERALES:

$AE; BF; DH;\ldots..$

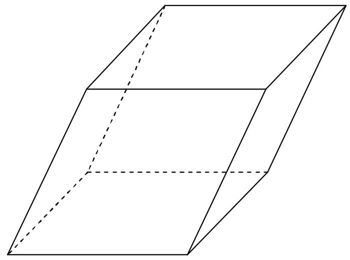
4-) **CLASIFICACIÓN DE LOS PRISMAS:**

a) **Prisma recto:** es el prisma cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases. Las aristas laterales de un prisma recto son iguales a la altura.

b) **Prisma Oblicuo:** llamase prisma oblicuo aquel cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases.



Prisma recto



Prisma oblicuo

– ***Clasificación de los prismas según las bases:***
Se dice que un prisma es triangular, cuadrangular, pentagonal, etc. Según que, su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

– ***Sección recta de un prisma:*** Llamase sección recta de un prisma la sección determinada por un plano que corta todas las aristas y es perpendicular a ellas.

5-) **PARALELEPIPEDO:** Llamase paralelepípedo todo prisma en que las bases son paralelogramos.

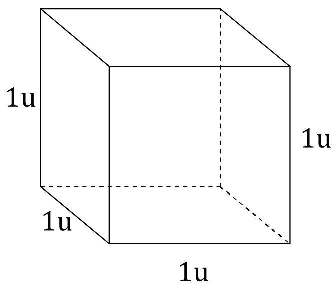
– ***Paralelepípedo recto:*** es el paralelepípedo cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases.

– ***Paralelepípedo rectángulo:*** es todo paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulos. En este caso las cuatro caras son también rectángulos.

– ***Cubo:*** Llamase cubo un paralelepípedo recto cuyas caras y bases son cuadrados.
Se define también el cubo diciendo que es un exaedro (solido de seis caras) cuyas seis caras son cuadrados (Exaedro regular).

– ***Diagonal de un paralelepípedo rectángulo:***
Es el segmento rectilíneo que une dos vértices opuestos, se llama diagonal del paralelepípedo. No se deben confundir con las diagonales de las caras.

6-) **UNIDAD DE VOLUMEN:** La unidad de volumen es el espacio ocupado por un cubo cuya arista es igual a la unidad de longitud.



7-) **VOLUMEN:** Llamase volumen de un sólido el número de unidades de volumen que contiene.

8-) **SOLIDOS EQUIVALENTES:** Llamase solido equivalentes los que tiene un mismo volumen.

9-) **AREAS Y VOLUMENES DE PRISMAS E PARALELEPIPEDOS RECTOS…** **(CUBOS).**

- $A_L = P_b.H$……………………………………………… Área lateral

- $A_T = A_L + 2Ab$……………………………………… Área Total

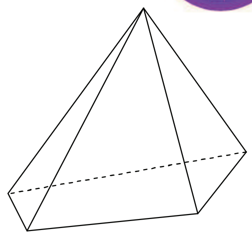
  $A_b =$ Área de la base.

- $\mathrm{V} = A_b.H$………………………………………………… Volumen.

OBS: En caso que tengamos un prisma oblicuo
P_b……………………………………… es sustituida por el perímetro de la sección recta.
y A_b……………………………………… Área de la sección recta.

OBS: Estas fórmulas son aplicables sea cual fuese (Inclusive para un cilindro).

10-) **PIRAMIDE:** Llamase pirámide un poliedro en que una de las caras, llamada base, es un polígono cualquiera y las otras caras son triángulos que tienen un vértice común.



El término CARA se aplica exclusivamente a estos triángulos.

Las intersecciones de las caras laterales se llaman aristas laterales.

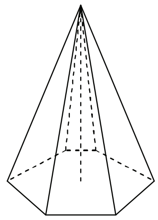
Altura: Es la longitud de la perpendicular del vértice al plano de la base.

11-) **CLASIFICACIÓN DE LAS PIRÁMIDES SEGÚN LA BASE:**

Se dice que una pirámide es triangular, cuadrangular, etc. Según que, su base sea un triángulo, un cuadrilátero, etc.

La pirámide triangular se llama TETRAEDRO, como todas sus caras son triángulos, cualquiera de ellas puede tomarse por base.

12-) **PIRÁMIDE REGULAR: (o Recta)**



Pirámide regular

Llamase pirámide regular aquella cuya base es un polígono regular y cuyo vértice se halla en la perpendicular levantada al plano de la base en el centro de ese polígono.

Apotema de una pirámide regular: se llama Apotema de una pirámide regular la altura común de los triángulos que forman sus caras, tomando por bases de los triángulos los lados de la base de la pirámide.

OBS: – Las aristas laterales de una pirámide regular son iguales.

– Las caras de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales y la altura de estos triángulos laterales es la apotema de la pirámide. Ap.

13-) ***ÁREAS Y VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE REGULAR:***

– $A_L = \dfrac{P_b \,.\, Ap}{2}$.. $\begin{cases} P_b \ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots \text{Perimetro de base} \\ Ap \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\text{Apotema lateral.} \end{cases}$

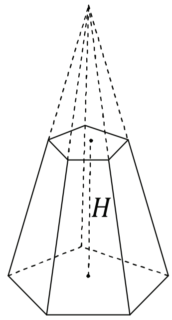
– $A_T = A_L + A_b$............................A_b...................................Área de base.

– $V = \dfrac{A_b \,.\, H}{3}$.....................................H altura de la pirámide.

OBS: A_b.. Área de base depende del polígono que es la base.

Estas fórmulas son aplicables, sea cual fuese la base inclusive cuando es una cia.

14-) **PIRÁMIDE TRUNCADA O TRONCO DE PIRÁMIDE:**



Llamase pirámide truncada o tronco de pirámide la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección determinada por un plano paralelo a la base.

Esta sección y la base de la pirámide se llaman bases del tronco.

Altura de un tronco de pirámide:

Es la longitud de la perpendicular trazada de una base a la otra H.

Caras de un tronco de pirámide: son las caras limitadas por las bases.

Las caras de un tronco de pirámide son trapecios y en la pirámide regular son trapecios iguales e isósceles.

Apotema de un tronco de pirámide regular:

Es la altura de estos trapecios que forman sus caras. Ap.

15-) ***ÁREAS Y VOLUMEN DE TRONCOS DE PIRÁMIDES REGULARES.***

$$A_L = \frac{P_B + P_b}{2}.Ap \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} P_B \ldots\ldots\ldots \text{Perimetro base mayor.} \\ P_b \ldots\ldots\ldots \text{Perimetro base base menor.} \\ Ap \ldots\ldots\ldots \text{Apotema.} \end{array} \right.$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} A_B \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Area base mayor.} \\ A_b \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Area base menor.} \end{array} \right.$$

$$V = \frac{H}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B.A_b}\right)$$

También se acostumbra simplificar.

$$V = \frac{1}{3} H\left(B + b + \sqrt{B.b}\right)$$

ANEXO:

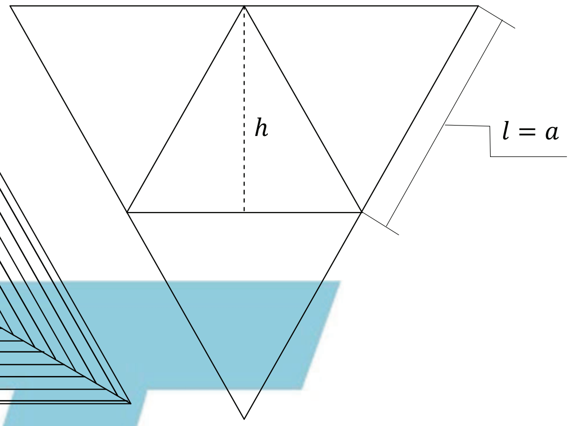
CUERPOS POLIEDROS REGULARES POSIBLES.

Poliedro regular: es el cuerpo poliedro cuyas caras son todos polígonos regulares iguales.

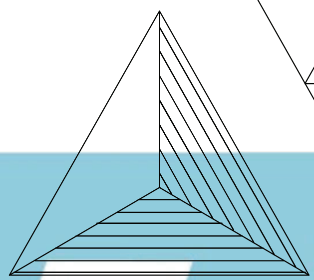
Sus ángulos diedros y sus ángulos poliedros también son todos iguales.

EXISTEN SOLO CINCO POLIEDROS REGULARES.

- ***PRIMERO:***



TETRAEDRO REGULAR: limitado por 4 triángulos equiláteros unidos de 3 en 3. (En cada vértice concurren 3 caras)



Para resolver área y volumen se procede normalmente como una pirámide.

OBS: El radio de la esfera inscripta en el tetraedro regular es igual a $\frac{1}{3}H = r$

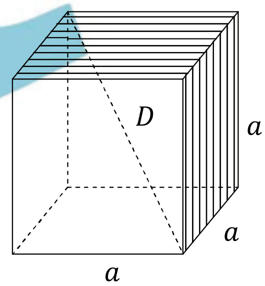
El radio de la esfera circunscripta al tetraedro regular es $\frac{2}{3}\mathrm{H} = \mathrm{R}$

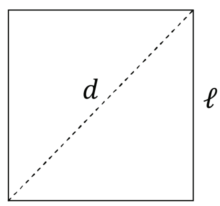
h…………………………….....................Altura de un triángulo lateral

H…………………………….....................Altura del cuerpo poliedro.

- ***SEGUNDO:***

EXAEDRO REGULAR – CUBO:





Limitado por 6 cuadrados unidos de 3 en 3.

Para resolver área y volumen se procede normalmente como un prisma recto.

OBS: El radio de la esfera inscripta en el cubo es igual $r = \frac{a}{2} = \frac{\ell}{2}$

El radio de la esfera circunscripta al cubo es $R = \frac{D}{2}$

- ***TERCERO:***

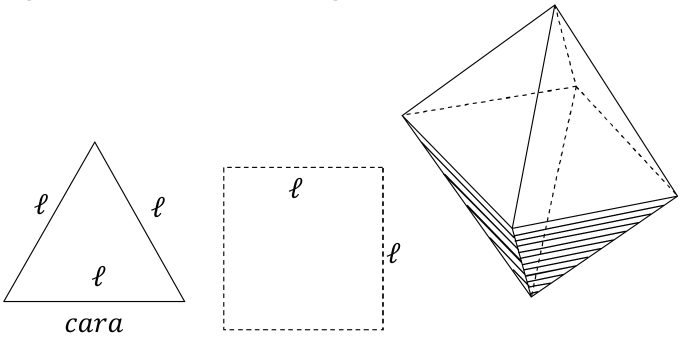
OCTAEDRO REGULAR: limitado por 8 triángulos equiláteros unidos de 4 en 4.

Este poliedro es lo mismo que dos pirámides regulares de base cuadrangular

Para calcular el área total $= 8A_{\Delta} = 2A_{L(P)}$

El área de la base no entra en el cómputo.

Para calcular el volumen se procede igualmente como dos pirámides.



CUARTO:

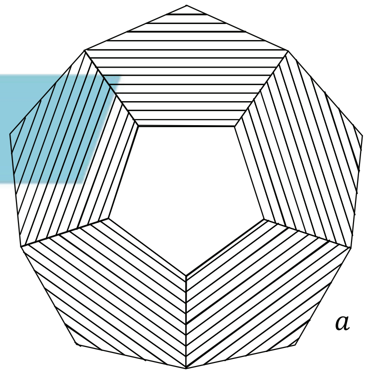
DODECAEDRO REGULAR: limitado por 12 pentágonos regulares unidos de 3 en 3.

Cada cara es un pentágono regular.

El área del dodecaedro regular se calcula multiplicando por 12 el área de una cara (pentágono)

Para calcular el volumen:

$$V = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$$



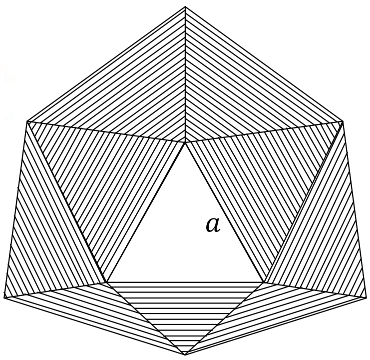
QUINTO:

ICOSAEDRO REGULAR: limitado por 20 triángulos equiláteros unidos de 5 en 5.

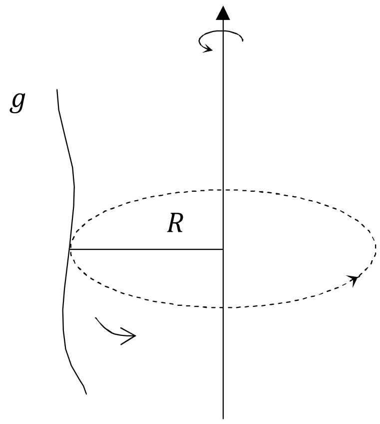
Para calcular el área debemos multiplicar el área de una cara(triángulo equilátero) por 20.

Para calcular el volumen:

$$V = \frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+\frac{3\sqrt{5}}{2}}{2}}$$



1-) **SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN:** Se llama superficie de revolución la superficie engendrada por una línea cualquiera(generatriz) al girar alrededor de una recta fija (eje) a la cual está invariablemente unida.



g................................ línea generatriz de la superficie de revolución.

2-) **CILINDRO DE REVOLUCIÓN:** puede considerarse como el cuerpo engendrado por la rotación completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

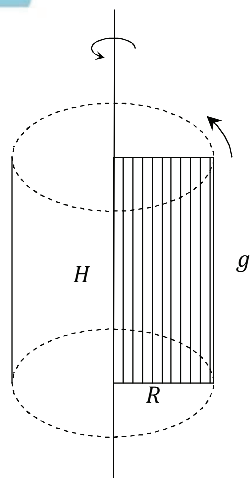
$P_b = 2\pi R$ .... Perimetro de base

$A_b = \pi R^2$ .... Área de base.

$A_L = P_b . H = P_b . g$ .... Área lateral.

$A_T = A_L + 2A_b$ .... Área Total.

$V = A_b . H$ .... Volumen.



OBS: Las fórmulas son semejantes a las del prisma recto.

3-) **CONO DE REVOLUCIÓN:** puede considerarse como el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos hasta dar una revolución completa.

A la hipotenusa del triángulo rectángulo se lo denomina también generatriz g.

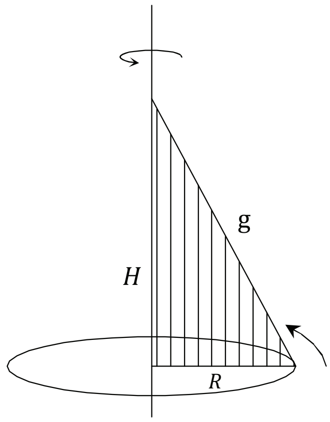
$$P_b = Cia = 2\pi R$$

$$A_b = Co = \pi R^2$$

$$A_L = \frac{P_b \, . \, g}{2} \ldots\ldots\ldots \text{Área lateral}$$

$$A_T = A_L + A_b \ldots\ldots\ldots \text{Área total.}$$

$$V = \frac{1}{3} A_b \, . \, H \ldots\ldots\ldots \text{Volumen.}$$



Formulas idénticas a las de pirámide regular.

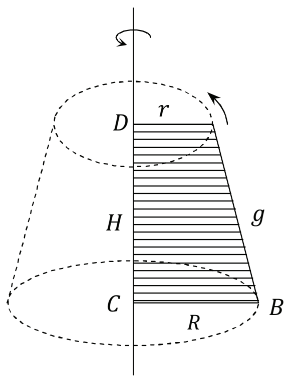
4-) **TRONCO DE CONO DE REVOLUCION:** intuitivamente el tronco de cono de revolución de bases paralelas se puede considerar como engendrado por un trapecio rectángulo $ABCD$, que gira alrededor del lado CD , perpendicular a las bases, verificando una revolución completa.

$B \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ base mayor.
$b \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ base menor.

$$A_L = \frac{P_B + P_b}{2} . g \dots \dots \dots .. \text{Área lateral.}$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b \dots \dots ... \text{Área total.}$$

$$V = \frac{H}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B . A_b}\right)$$



EJE DE GIRO.

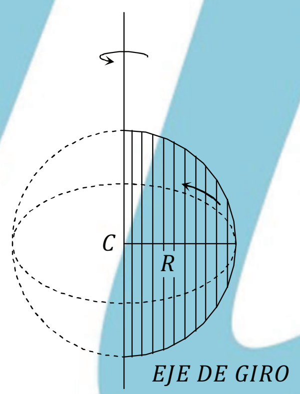
$$\begin{cases} P_b = 2\pi r \\ P_B = 2\pi R \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_b = \pi r^2 \\ A_B = \pi R^2 \end{cases}$$

Las formulas son análogas al tronco de pirámide.

5-) **SUPERFICIE ESFÉRICA:** Puede considerarse como engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro una vuelta completa.

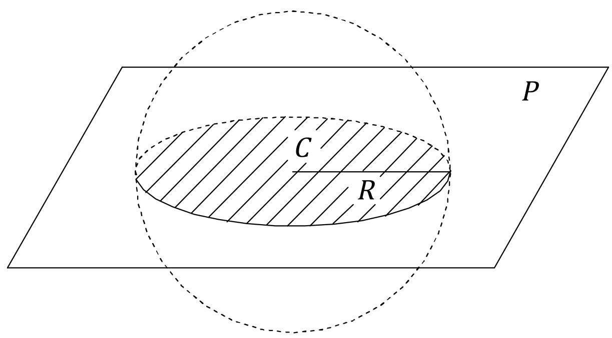
- Es el lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de un punto llamado centro, la distancia de un punto cualquiera de dicha superficie al centro se denomina radio.



ESFERA: Es el espacio limitado por una superficie esférica, representa el volumen del cuerpo.

Círculo máximo de una esfera: es la sección determinada en una superficie esférica por un plano que pasa por su centro.

Todos los círculos máximos de una misma esfera son iguales.



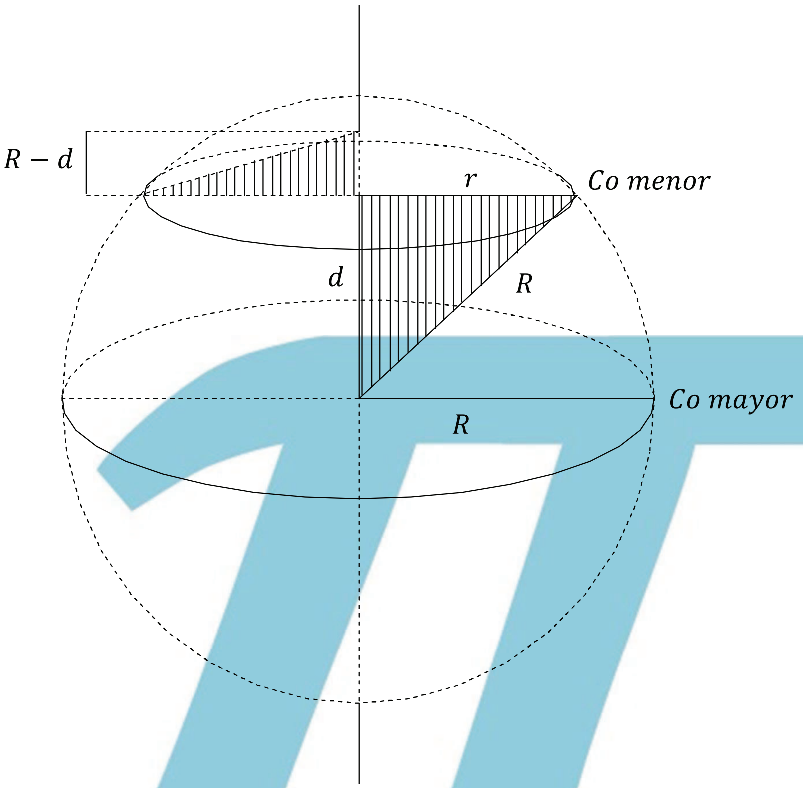
El radio del círculo máximo es el mismo de la esfera R.
Se acostumbra también decir circunferencia máxima para referirse al perímetro del círculo máximo.

Círculo menor de una esfera: es la sección determinada en una superficie esférica por un plano que no pasa por el centro.

La distancia del centro al plano se denomina d.

El radio de este círculo se lo llama r y es menor que el radio de la esfera.

Cuanto más cerca del centro pase el plano, mayor será el círculo menor.



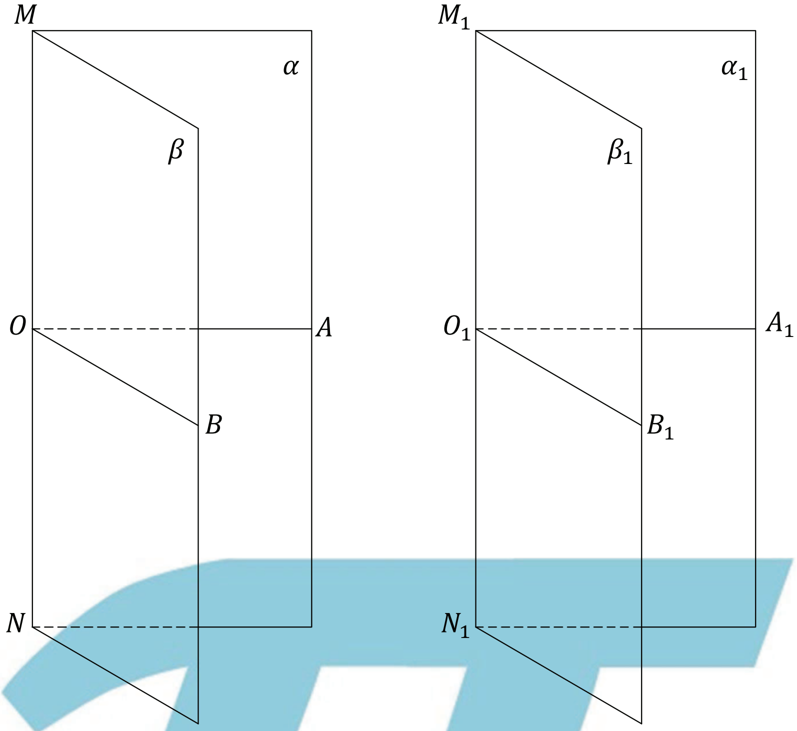
Las relaciones entre las dimensiones del Co menor, Co mayor y d pueden deducirse fácilmente por Pitágoras.

$$A_E = 4\,\pi\,R^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Área de la esfera.}$$

$$V_E = \frac{1}{3}R.\,4\,\pi\,R^2.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Volumen de la esfera.}$$

<u>OBS:</u> El volumen de la esfera podemos recordar fácilmente imaginando infinitos conos cuyas bases forman la superficie esférica y cuyas alturas es igual al radio de la esfera R.

<u>TEOREMA:</u> Si los ángulos rectilíneos de dos diedros son iguales, los diedros también lo son.



H) $\overset{\angle}{AOB}$ rectilíneo del ${}^{d}/_{\alpha\beta}$

$\overset{\angle}{A_1O_1B_1}$ Rectilíneo del ${}^{d}/_{\alpha_1\beta_1}$

$\overset{\angle}{AOB} = \overset{\angle}{A_1O_1B_1}$

T) ${}^{d}/_{\alpha\beta} = {}^{d}/_{\alpha_1\beta_1}$

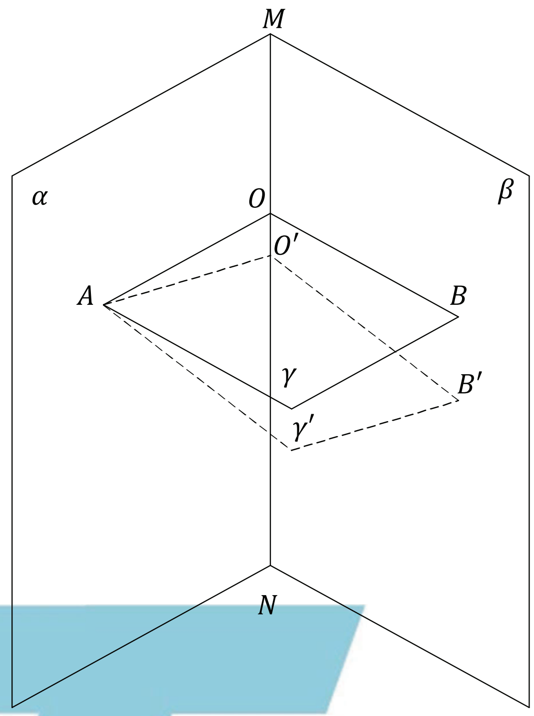
D) Transportando el ${}^{d}/_{\alpha_1\beta_1}$ sobre el diedro ${}^{d}/_{\alpha\beta}$, de modo que los ángulos planos iguales $\overset{\angle}{AOB}$ y $\overset{\angle}{A_1O_1B_1}$ coincidan.

En estas condiciones las aristas M_1N_1 y MN coincidirán, pues ambas son perpendiculares a los planos AOB y $A_1O_1B_1$ respectivamente en un mismo punto.

Las caras de los diedros también coincidirán, puesto que cada una tiene dos rectas en común respectivamente, por lo tanto los diedros serán iguales.

Luego $${}^{d}/_{\alpha\beta} = {}^{d}/_{\alpha_1\beta_1}$$

TEOREMA: Por un punto exterior a una recta pasa un plano perpendicular y solo uno.



H) A punto exterior a la recta MN.

T) Existe $\overset{\square}{\gamma} \perp MN$ por A.

El plano $\overset{\square}{\gamma}$ es único.

D) Sea el plano $\overset{\square}{\alpha}$ determinado por el punto A y MN.

En el plano $\overset{\square}{\alpha}$ trazamos por el punto A, $AO \perp MN$

Sea el plano $\overset{\square}{\beta}$ otro plano que contiene a MN pero no al punto A.

Trazamos la recta $BO \perp MN$ en O.

Las rectas AO y BO determinan el plano $\overset{\square}{\gamma}$.

$\overset{\square}{\gamma} \perp MN$…….. Porque "Todas las rectas perpendiculares a una recta en un mismo punto están en un plano perpendicular a ella en ese punto".

Si existiese otro plano $\overset{\square}{\gamma'}$ que pasa por A y es $\perp MN$ en O',

$\overset{\square}{\gamma'}$ cortaría α, según AO' y tendremos $MN \perp AO'$, en estas condiciones O y O' se confunden.

En el plano β tendríamos OB y OB' perpendiculares a MN en el mismo punto O y se confundirán.

Entonces $\overset{\square}{\gamma'}$ es $\overset{\square}{\gamma}$ porque ambos contienen a AO y BO

Y el plano $\overset{\square}{\gamma}$ es único.

EJERCICIOS DE GEOMETRIA DEL ESPACIO.

Prismas

1) Por un punto P que dista $5\ cm$ del plano α se traza a dicho plano una oblicua $\overline{PX}$ de $12\ cm$. ¿Cuál es el área limitada por el lugar geométrico de los puntos X?

2) Un punto dista $8\ m$ de cada uno de dos planos perpendiculares. ¿Cuál es su distancia a la arista del diedro formado por ellos?

3) Una recta cuya longitud es $10\sqrt{2}$ forma un ángulo de 45° con un plano. ¿Cuál es la longitud de su proyección sobre el plano?

4) Hallar el área lateral de un prisma recto de $2{,}125\ m$ de largo, cuya sección recta es un triángulo equilátero de $\frac{\sqrt{3}}{2}\ m$ de altura.

5) Hallar el área total de un prisma recto cuyas bases son cuadrados de $5{,}29\ cm^2$ y cuyo largo es el doble del ancho.

6) El área total de las seis caras de un cubo es $18\ cm^2$. Calcular la diagonal.

7) La diagonal de un cubo es $\frac{11\sqrt{3}}{4}\ m$. Calcular la diagonal de las caras.

8) La base de un prisma recto es un rombo de $20\ cm$ por lado y cuya diagonal menor es de $24\ cm$. La altura del prisma es de $30\ cm$. Hallar la superficie total y el volumen.

9) Representando por x la diagonal de las caras de un cubo. Expresar en función de x, el volumen y la superficie total del cubo.

10) Al sumergir un cuerpo en el agua contenida en un cilindro circular de $60\ cm$ de diámetro, el nivel del agua sube $40\ cm$. ¿Cuál es el volumen del cuerpo?

11) La profundidad de una vasija cilíndrica de 20 litros de capacidad es igual al diámetro. Hállese el diámetro.

12) ¿Cuál es el área total de un cubo en función de su diagonal?

13) La superficie de la base de un paralelepípedo rectángulo es de $48\ m^2$, la de su cara lateral 42 m y la de un plano diagonal determinado por dos aristas laterales $70\ m^2$. Calcular el área lateral de dicho cuerpo.

14) Calcular el área total de un exaedro regular, sabiendo que la distancia de uno de sus vértices al centro de una cara opuesta es $2\ m$.

15) Hallar el área total de un cubo, sabiendo que su arista, una diagonal y la diagonal de una de sus caras suman $4\ m$.

16) El desarrollo de la superficie lateral de un prisma triangular regular, de $8\ m$ de altura, es un rectángulo cuya diagonal mide $10m$. Calcular el área total del prisma.

17) El número que mide, en metros, la diagonal de un cubo, es igual al número que representa el área, en metros cuadrados, de un triángulo que tiene un vértice en el centro de una de las caras del cubo, y por lado opuesto, la diagonal de la cara opuesta. Calcular el área total del cubo.

18) Si una de las diagonales de un exaedro regular es igual a la diagonal de una de las caras de otro exaedro regular. ¿Qué relación existe entre las áreas de estos dos poliedros?

19) El desarrollo de una superficie cilíndrica de revolución es un rectángulo de $3{,}6\ m$ de altura y 6 m de diagonal. Calcular el área lateral del cilindro.

20) En un cilindro de revolución de $5\ cm$ de altura se puede inscribir un paralelepípedo rectángulo, cuya superficie lateral es de 250 cm^2. Una de las dimensiones del rectángulo es de $16\ cm$. Calcular, en centímetros cuadrados, el área lateral del cilindro.

21) Hallar el ángulo de la cuña que resulta de cortar un cilindro de revolución, de $9\ cm$ de radio y $6\ cm$ de altura, por dos planos que pasan por el eje, siendo la superficie total de aquella de 174,411 cm^2.

22) ¿Qué altura debe tener un cilindro de revolución de radio R, para que el cuadrado de ella sea media geométrica entre el área lateral y el área de la base?

23) La altura y el radio del cilindro interior de una vasija miden $20\ cm$ y $12\ cm$. El espesor de la vasija lateralmente y en el fondo, es de $3\ mm$. Calcular en dm^2, las áreas totales de las superficies interior y exterior.

24) En un prisma triangular regular se inscribe un cilindro. ¿Qué relación existe entre las áreas laterales de estos cuerpos?

25) La diagonal del rectángulo resultante de cortar cilindro de revolución por un plano que pasa por el eje, mide $3\ m$ y es igual al doble del diámetro de la base. Calcular el área lateral del cilindro.

26) Hallar el área total de una cuña que resulta de cortar un cilindro por dos planos que contienen al eje y forman entre si 40°. La altura del cilindro es de $5\ m$ y su radio $2\ m$.

27) La sala de una escuela tiene $8{,}75\ m$ de longitud $6{,}50\ m$ de anchura y $4,25\ m$ de altura. ¿Cuánto hay que elevar la altura del techo para que 64 discípulos y el maestro que ocupan esta sala puedan respirar $5\ m^3$ de aire cada uno?

28) Hallar el volumen de un cubo circunscripto a una esfera de $2\ m$ de radio.

29) Se hace una zanja de $52\ m$ de longitud, $2\ m$ de anchura y $0{,}75\ m$ de profundidad. La tierra extraída se extiende uniformemente sobre un suelo de 12 áreas. ¿Cuál es en mm, el espesor de la capa extendida, suponiendo que las tierras han aumentado 10 % del volumen que ocupaban antes de ser extraídas?

30) Hallar el volumen de un cubo, sabiendo que la suma de todas sus aristas, de las diagonales del cuerpo y de las diagonales de sus caras es igual a $32\ m$.

31) Hallar la longitud de la arista de un cubo, sabiendo que el volumen de otro cubo de $1\ m$ más de arista se diferencia del anterior en $7\ m^3$.

32) Cortar un cubo de 125 m^3 de volumen por un plano que pase por los puntos medios de tres aristas no contiguas y no paralelas y calcular el área de la sección resultante.

33) La distancia entre uno de los vértices de un cubo y el centro de una de las caras opuestas es de $0{,}6m$. Calcular el volumen del cubo.

34) Los números que miden, en metros, las tres dimensiones de un paralelepípedo rectángulo están en progresión aritmética, el número que representa la segunda dimensión es, en metros cubicos el volumen del cuerpo, y una de las diagonales de éste mide $3\ m$. Calcular el volumen del paralelepípedo.

35) El área lateral de un prisma recto, cuya base es un rombo, es igual a 2,04 m^2. Las diagonales del rombo miden $1{,}36\ m$ y $1,02\ m$. Calcular el volumen del prisma.

36) Calcular la diagonal de un cubo para que su volumen sea 8 veces el de otro cubo de arista igual $\sqrt{3}m$.

37) Un recipiente de forma cubica contiene $14\ m^3$ de agua. Se introduce un cubo macizo de hierro cuya arista es la mitad de la de aquel, y el agua se eleva hasta enrasar el recipiente. Calcular el volumen de este.

38) Un depósito, de forma prismática hexagonal regular, se comunica por medio de un conducto situado en la parte más baja con otro prismático cuadrangular regular.

Por el conducto pueden pasar 2,0 litros por segundo y ambas bases se encuentran niveladas. Estando lleno el primer depósito y vacío el segundo, se abre en un momento dado, el conducto que los comunica, y se cierra cuando el agua alcanza en ambos depósitos la misma altura. ¿Qué tiempo ha estado abierto el conducto?

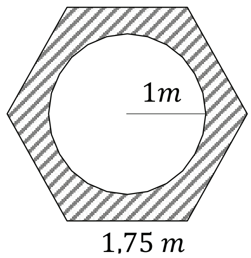
Lado del hexágono de la base del primer deposito $5\ m$, altura de este $8\ m$.

Lado del cuadrado de la base del segundo deposito $6\ m$. Determinar también la altura mínima que debe tener el segundo depósito para que no se derrame el agua.

39) Hallar el volumen de un cilindro de revolución en función de la circunferencia C de la base, y de la diagonal d que une los extremos de dos generatrices diametralmente opuestas.

40) Determinar las relaciones que existen entre los volúmenes y entre las áreas laterales de los dos cilindros que engendra un rectángulo al girar 360° sucesivamente alrededor de los dos lados contiguos que miden $7{,}50\ m$ y $3{,}60\ m$.

41) La base de una chimenea de ladrillo, de $10\ m$ de altura, está representada en la figura. En la parte superior es de la misma forma, variando solo la longitud del lado del hexágono regular, que es de $1{,}50\ m$. Calcular el volumen de material que se ha necesitado para su fabricación.



42) El volumen del cuerpo limitado por dos superficies esféricas es de $410{,}5024\ m^3$, y la diferencia de los radios $2\ m$. Hallar las longitudes de los radios.

43) El apotema de una pirámide triangular regular es igual a la altura de la base y el área de esta es $\sqrt{3}\ m^2$. ¿Cuál es el área total de la pirámide?

44) La base de una pirámide es un triángulo rectángulo en que la hipotenusa y un cateto son 5 y $3\ m$ respectivamente. Otra de igual altura tiene por base un triángulo equilátero cuyo lado es de $2\sqrt{2\sqrt{3}}\ m$. Demuéstrese que estas dos pirámides son equivalentes.

45) Hallar el área lateral y el volumen de una pirámide regular cuyo apotema es de $16\ cm$ y cuya base es un hexágono de $12\ cm$ por lado.

46) El volumen de una pirámide regular es $29{,}4\ m^3$. La base es un cuadrado de $3{,}5\ m$ por lado. Hallar la altura y la apotema.

47) Hallar el volumen de una pirámide regular en que la altura es $12\ m$ y la base es un triángulo inscripto en un círculo de $10\ m$ de radio.

48) Si A es el área total de una pirámide regular de base cuadrada y en que todas las aristas son iguales, exprésese la arista en función de A.

49) ¿Cuál es la capacidad de un toldo cónico de $3\ m$ de diámetro y $2{,}1\ m$ de alto?

50) Dada una pirámide regular de $12\ m$ de altura. Hállese la altura de un prisma cuya base y volumen sean equivalentes a los de la pirámide.

51) El área total de una pirámide triangular regular es de $60\ m^2$ y el radio del círculo inscripto en la base mide $2\ m$. Hallar la altura de la pirámide.

53) La base de una pirámide es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa igual a $\sqrt{8}\ m$. La arista lateral, que contiene el vértice del ángulo recto de dicho triángulo es perpendicular a la base e igual a $3\ m$. Calcular el área total de la pirámide.

54) El radio de la base de una pirámide triangular regular mide $3\ m$ y la suma de todas las aristas $44\ m$. Calcular el área total de la pirámide.

55) Calcular el área lateral de una pirámide triangular regular, sabiendo que se pueden inscribir en sus caras laterales circunferencias de $3\ m$ de radio y en la base otra de $2\ m$ de radio.

56) Calcular el área total de un octaedro regular, cuya diagonal mide $6\ m$.

57) La generatriz de un cono de revolución es igual al desarrollo de la circunferencia de la base, y su área lateral $9\ m^2$. Determinar la altura del cono.

58) El desarrollo de la superficie lateral de un cono de $4\ m$ de altura es un sector circular de $20°$. Hallar el radio de la base.

59) Un cono y un cilindro, ambos de la misma altura tienen igual área lateral y los desarrollos de sus superficies laterales son un sector de ángulo $120°$ y un rectángulo de $4\ m$ de base. Determinar la altura común de los dos cuerpos.

60) Hallar el área engendrada por los catetos de un triángulo rectángulo, al girar $360°$ alrededor de la hipotenusa. Los catetos son de $4{,}05\ m$ y $5{,}40\ m$.

61) Se hace que giren dos lados contiguos de un cuadrado alrededor de una diagonal hasta que coincidan con los otros dos lados. ¿Cuál es el área de la superficie engendrada por esos dos lados?

62) Hallar la relación en que están las áreas de las superficies laterales de un cono de revolución y de una pirámide hexagonal regular inscripta en aquel, siendo los dos cuerpos de la misma altura $1\ m$ y el radio de la base del cono de $2\ m$.

63) Las tres dimensiones de un paralelepípedo rectángulo miden $2\ m$, $3\ m$ y $6\ m$. Hallar su volumen, su área total, su diagonal, la suma de sus aristas y la arista del cubo equivalente.

64) Sobre la cara superior de un cubo de volumen igual a $4{,}096\ m^3$ se sobrepone otro cubo de volumen mitad, y sobre la cara superior de este también se sobrepone otro de volumen mitad que el anterior. ¿Cuál es la distancia entre la cara superior del tercer cubo y la inferior del primero?

65) Hallar el volumen de una pirámide de $2{,}75\ m$ de altura, que tiene por base un rombo, cuyas diagonales miden $0{,}85\ m$ y $0{,}60\ m$.

66) Hallar la apotema de una pirámide triangular regular de volumen igual a $2\ m^3$, cuya altura mide $2\ m$.

67) Hallar el volumen de una pirámide hexagonal regular de $3\ m$ de altura, cuyas aristas forman ángulos de $60°$ con el plano de la base.

68) Expresar el volumen de una pirámide triangular regular en función del lado ℓ y de la arista lateral A.

69) Una pirámide tiene por base un triángulo de lados $13\ m$, $14\ m$ y $15\ m$. Las tres aristas laterales son iguales a $20\ m$. Calcular el volumen de la pirámide.

70) Hallar el volumen de una pirámide regular de $15\ m$ de arista, que tiene por base un octógono de $6m$ de lado.

71) La diferencia entre los volúmenes de dos pirámides de la misma base, y $9\ m$ y $5\ m$ de altura, respectivamente, es igual a $196\ m^3$. Calcular el volumen de cada una de las pirámides.

72) Hallar, en función del radio r, la fórmula del volumen de un cono de revolución, cuya generatriz es igual a la longitud de la cia de la base.

73) Conservando la base de un cono de revolución de $5\ m$ de radio y $30\ m$ de altura, se obtiene otro cono, despreciando $471\ m^3$ de su materia. ¿En cuántos metros disminuyo la altura del primer cono?

74) El volumen de un cono es de $157\ m^3$, y el radio de su base $2{,}50\ m$. Determinar el ángulo del sector obtenido al desarrollar la superficie cónica sobre un plano.

75) El área lateral de un cono de revolución es el doble del área de la base y este cono es equivalente a un cilindro de $1\ m$ de altura, que tiene por base un cilindro de radio igual a la altura del cono. Calcular el volumen del cono.

76) Si una pirámide de 30 cm de altura y 8.100 cm^2 de base se corta por un plano paralelo a la base a 20 cm de esta. ¿Cuál es el volumen del tronco así obtenido?

77) La base inferior de un tronco de pirámide es un cuadrado de 3 cm por lado. El lado de la superior es la mitad del de la inferior y la altura del tronco es igual al lado de la base superior. ¿Cuál es el volumen?

78) La base inferior de un tronco de pirámide es un cuadrado de 3 m de lado. El área de la superior es la mitad del área de la inferior y la altura del tronco es de 2 m. ¿Cuál es el volumen?

79) Calcular la arista de un tetraedro regular cuyo volumen es $2\sqrt{2}\ m^3$

80) Hallar el volumen de un tronco de pirámide regular cuyas bases son cuadrados de $54\ cm$ y $24\ cm$ por lado y cuyo apotema es $25\ cm$.

81) Las bases de un tronco de pirámide regular son hexágonos de $1\ m$ y $2\ m$ por lado respectivamente. El volumen es de $12\ m^3$. Hallar la altura.

82) De un cono de revolución de 30 cm por lado siendo la Cia de la base $10\ cm$, se corta con un plano paralelo a la base un cono de 6 cm de generatriz. Hállese el área lateral y el volumen del tronco así obtenido y también el volumen del cono entero.

83) En un tronco de pirámide $\mathrm{H} = 9\ \mathrm{m}$ y las bases son cuadrados de $6\ m$ y 8 m por lado respectivamente. Hállese la diferencia entre su volumen y el de un prisma de igual altura y de base igual a una sección del tronco paralela a las bases y equidistantes de ellas.

84) Una construcción de piedra tiene forma de un cono truncado hueco y descubierto de 12 m de altura. Los diámetros exteriores de las bases son 12 y 16 m. Los interiores de las bases son 10 y 12m. ¿Cuantos m^3 de piedra contiene?

85) Un tronco de cono de revolución tiene $5\ m$ de altura y diámetros de 2 y 3 m. Hállese la altura de un cilindro de revolución equivalente de base equivalente a la sección del tronco paralela a las bases y equidistantes de ellas.

86) Hállese el diámetro de un círculo menor cuyo plano dista $3\ cm$ del centro de la esfera, la cual tiene $10\ cm$ de diámetro.

87) El diámetro exterior de una esfera hueco de hierro es de $50\ cm$, el espesor de 5 cm. Hallase el peso, suponiendo que el hierro pesa $7.200\ \mathrm{kg}/m^3$.

88) Expresar el volumen de una esfera en función de la Cia máxima. C_{max}

89) Calcular el área total de un tronco de pirámide de bases paralelas, cuya base mayor es un cuadrado de 5 m de lado. La altura del tronco mide 1 m y sus caras laterales forman ángulos de 60° con la referida base.

90) Una pirámide de 4 m de altura tiene por base un cuadrado de 3 m de lado y una de sus caras es un triángulo isósceles, cuyo plano es perpendicular a la base. Calcular el área lateral de la pirámide.

91) Las áreas laterales de un cilindro y de un tetraedro regular de la misma altura 4 m son iguales. Calcular la longitud del radio del cilindro.

92) Determinar la altura de un tronco de cono de revolución, conociendo su área lateral, 24 m^2, y los radios de sus bases 2,40 m y 1,80 m.

93) A un cono de revolución de 5 m de radio y 10 m de altura, se le corta por un plano distante 4 m del vértice. Calcular el área lateral del tronco de cono resultante.

94) ¿A qué distancia del vértice de un cono de revolución hay que trazar un plano paralelo a la base, para que el área de la sección sea igual al área lateral del tronco de cono resultante?

95) La generatriz de un cono mide 2,20 m. Un plano paralelo a la base divide a la superficie cónica en dos partes que están en la relación $\frac{2}{3}$. Calcular las longitudes de los segmentos en que queda dividida la generatriz por el citado plano.

96) La sección causada en un tronco de cono de revolución, de 2 m de altura, por un plano que pasa por el eje es un trapecio de 16 m^2 de superficie. Siendo el radio de una de las bases de 2 m. Calcular el área lateral de la superficie tronco cónica.

97) La sección causada por un plano en una esfera de 5 dm de radio es de 80 cm^2 de superficie. ¿Cuál es, en metros, la distancia del centro de la esfera a esa sección?

98) La Cia de un círculo máximo de una esfera mide 60 cm. Calcular, en metros cuadrados, el área de la superficie esférica.

99) El área de un cubo es 10,14 m^2. ¿Cuál es el área de la superficie esférica inscripta en aquel?

100) Calcular, en metros cuadrados, el área de una superficie esférica circunscripta a un cubo de 32cm de arista.

101) La diferencia entre las áreas de las superficies interior y exterior de una esfera hueca es $12,56\ dm^2$. La suma de los radios de dichas superficies es 2,5 m. ¿Cuál es en mm, el espesor de la esfera?

102) Las áreas de tres superficies esféricas suman 132 m^2. El radio de la primera es doble que el de la segunda, y el radio de la tercera es una media proporcional entre los radios de las otras dos. Calcular el área de cada una de ellas.

103) Calcular las tres dimensiones de un paralelepípedo rectángulo, cuyo volumen es igual a 729 m^3, semejante a otro que tiene por dimensiones $4\ m$, $6\ m$ y $9\ m$.

104) Hallar el volumen de un prisma oblicuo, cuya base es un triángulo equilátero de 1,64 m de lado y cuyas aristas laterales, de 3,25 m de longitud, forman con la base un ángulo de 30°.

OBS: El volumen de un prisma oblicuo es igual al área de la sección recta por la distancia entre los planos paralelos de las bases.

105) Calcular el volumen de un cubo inscripto en una esfera de superficie igual a 20 m^2.

106) Hallar el peso en kilogramos, de una pirámide cuadrangular regular de acero. Las aristas laterales son iguales a la diagonal de la base y esta diagonal mide 0,12 m, peso específico de acero: $7{,}8\ \mathrm{gr/cm^3}$

107) Se corta una pirámide cuadrangular regular por un plano determinado por dos aristas opuestas. El área de la sección resultante es 12 m^2 y la arista lateral de la pirámide es de $5\ m$. Calcular el volumen de la pirámide.

108) Una pirámide de 3,3 m de altura es cortada por un plano paralelo al de la base, de manera que los dos poliedros resultantes son equivalente. ¿Cuál es la distancia del vértice a dicho plano?

109) El volumen de un tronco de pirámide hexagonal regular de bases paralelas es igual a $40\ m^3$, su altura $3\ m$ y el área de la base mayor 20 m^2. Calcular la relación que existe entre los lados de los hexágonos de las bases.

110) El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un rectángulo de diagonal igual a 3,55 m y base igual a 2,84 m. Calcular el volumen del cilindro.

111) Hallar el número por el cual hay que multiplicar el volumen de un cubo para obtener el volumen de la esfera inscripta en el.

112) ¿A qué distancia deben estar situados dos esferas de igual radio 1,50 m, para que el volumen comprendido entre sus superficies y la superficie lateral cilíndrica circunscripta sea igual a 21,195 m^3

113) Averiguar la relación en que están los volúmenes de un cono, de una esfera y de un cilindro, teniendo el cono y el cilindro por altura y diámetro de la base el diámetro de la esfera.